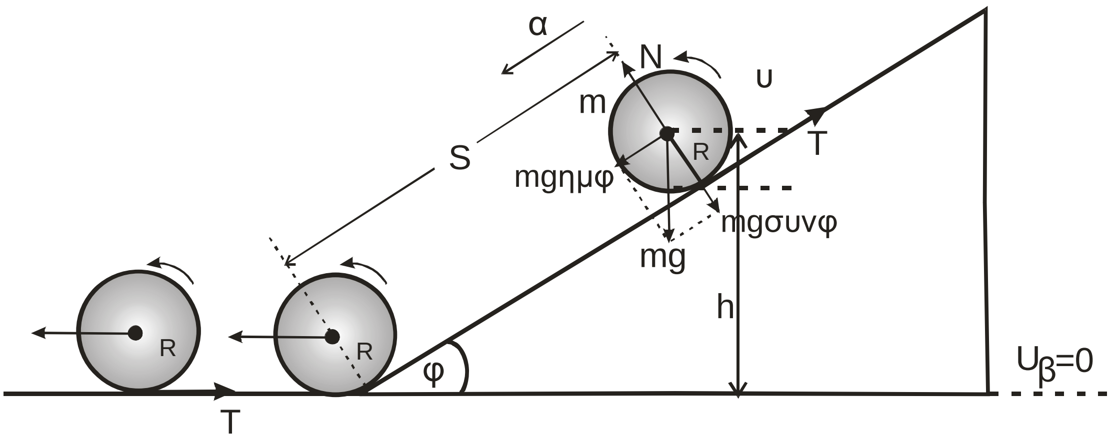
Κύλιση με ολίσθηση (αρχικά σε πλάγιο και στη συνέχεια σε οριζόντιο επίπεδο)

Στερεός κύλινδρος μάζας m=4Kg και ακτίνας R=0,2m κατέρχεται υπό την επίδραση του βάρους του σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με ημφ=0,6 και συνφ=0,8. Αν ο κύλινδρος καθώς κατεβαίνει κυλίεται ενώ ταυτόχρονα ολισθαίνει και η κίνησή του διαρκεί t=2s, τότε:
α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του Κ.Μ του και η γωνιακή του ταχύτητα όταν φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
β) Να υπολογιστεί το έργο της τριβής ολίσθησης κατά την κίνηση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο.
γ) Όταν φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου συναντάει οριζόντιο επίπεδο με τον ίδιο συντελεστή τριβής. Τι κίνηση θα κάνει ο κύλινδρος στο οριζόντιο επίπεδο και σε πόσο χρόνο θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;
δ) Πόση είναι η απώλεια της μηχανικής του ενέργειας στο οριζόντιο επίπεδο, μέχρι να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;
ε) Για ποιες γωνίες του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε στο κεκλιμένο επίπεδο κύλιση χωρίς ολίσθηση;
Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που τον θεωρούμε ίσο με το συντελεστή στατικής τριβής με τις επιφάνειες μ=0,2 και ακόμη $I=\frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2$ και $g=10m/s^2$.



Λύση:

α) Όταν έχουμε και ολίσθηση η τριβή Τ που εμφανίζεται είναι η τριβή ολίσθησης $T=T_{ολ}$. Όπου $T=T_{ολ}=μmgσυνφ=6,4N$.

Για τη μεταφορική κίνηση: $ΣF=mα \Rightarrow mgημφ-T=mα \Rightarrow mgημφ-μmgσυνφ=mα \Rightarrow$
$\Rightarrow α=g(ημφ-μσυνφ)=10\cdot(0,6-0,2\cdot 0,8) \Rightarrow α=4,4m/s^2$.

Για τη στροφική κίνηση: $Στ=I\cdot α_{γων} \Rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot α_{γων} \Rightarrow μmgσυνφ=\frac{1}{2}\cdot m\cdot R\cdot α_{γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow α_{γων}=\dfrac{2μgσυνφ}{R} \Rightarrow α_{γων}=16rad/s^2$.

Τότε για την ταχύτητα του Κ.Μ στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου θα έχουμε $υ=α\cdot t \Rightarrow υ=4,4\cdot 2=8,8m/s$ και $ω=α_{γων}\cdot t=16\cdot 2=32rad/s$. Παρατηρούμε ότι $ω\cdot R=6,4m/s$ και άρα $υ>ω\cdot R$.

β) Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει μετατοπιστεί κατά $s=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 \Rightarrow s=2{,}2\cdot 4=8{,}8m$ και τότε έχει κατέβει κατακόρυφα κατά $h=s\cdot ημθ=5{,}28m$. Το διάστημα που έχει διαγράψει ο κύλινδρος κυλιόμενος είναι $s'=R\cdot\theta$, όπου $\theta=\frac{1}{2}\cdot\alpha_{γων}\cdot t^2 \Rightarrow \theta=32rad$. Τότε προκύπτει $s'=R\cdot\theta=6{,}4m$.

«απώλεια» ενέργειας έχουμε όμως μόνο μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης κατά την ολίσθηση του κυλίνδρου , ενώ για την κύλιση η στατική τριβή δεν παράγει έργο. Άρα ενώ το Κ.Μ του κυλίνδρου έχει μετατοπιστεί κατά s=8,8m κατά την κύλισή του έχει μετατοπιστεί κατά s΄=6,4m. Άρα ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί ολισθαίνοντας κατά διάστημα $\Delta s=s-s'=8{,}8-6{,}4=2{,}4m$. Τότε η «απώλεια» μηχανικής ενέργειας μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης είναι $W_T=-T\cdot \Delta s= -6{,}4\cdot 2{,}4 \Rightarrow W_T=-15{,}36J$.

Εξάλλου η τελική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2$ όπου $I=\frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2 =8\cdot 10^{-2}Kg\cdot m^2$. Έτσι έχουμε $K=2\cdot 8{,}8^2+0{,}04\cdot 32^2 \Rightarrow K=195{,}84J$.
Ακόμη η αρχική δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου είναι $U=mgh=40\cdot 5{,}28 \Rightarrow U=211{,}2J$.
Τότε παρατηρούμε ότι έχουμε «απώλεια» ενέργειας,
$\Delta E=K-U=195{,}84-211{,}2=-15{,}36J$, όσο και το W_T.

Ακόμη το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο έχει κάθε στιγμή ταχύτητα $\upsilon'=\upsilon-\alpha_{γων}\cdot R$ και επιτάχυνση $\alpha'=\alpha-\alpha_{γων}\cdot R=4{,}4-3{,}2=1{,}2m/s^2$. Τότε το διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο t=2s είναι $\Delta s=\frac{1}{2}\cdot\alpha'\cdot t^2=0{,}6\cdot 4=2{,}4m$ και $W_T=-T\cdot \Delta s= -6{,}4\cdot 2{,}4 \Rightarrow W_T=-15{,}36J$.

γ) Στο οριζόντιο επίπεδο η τριβή ολίσθησης θα έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Έτσι ο κύλινδρος θα επιβραδύνεται μεταφορικά και θα επιταχύνεται στροφικά ώστε να επέλθει αποκατάσταση της ισότητας $\upsilon_\kappa=\omega'\cdot R$. Όμως για τη μεταφορική κίνηση είναι $\upsilon_\kappa=\upsilon-\alpha'\cdot t$ και για τη στροφική κίνηση $\omega'=\omega+\alpha_{γων}'\cdot t$.

Για τη μεταφορική κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει: $\Sigma F=m\alpha' \Rightarrow T=m\alpha' \Rightarrow$
$\mu mg=m\alpha' \Rightarrow \alpha'=\mu g=2m/s^2$.

Για τη στροφική κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει:
$\Sigma\tau=I\cdot\alpha'_{γων} \Rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot \alpha_{γων}' \Rightarrow \mu mg=\frac{1}{2}\cdot m\cdot R\cdot\alpha'_{γων} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{γων}'=\frac{2\mu g}{R} \Rightarrow \alpha_{γων}' =20rad/s^2$.
Τότε $\upsilon_\kappa=\omega'\cdot R \Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon-\alpha'\cdot t = (\omega+ \alpha_{γων}'\cdot t)\cdot R \Rightarrow 8{,}8-2\cdot t=(32+20\cdot t)\cdot 0{,}2 \Rightarrow 8{,}8-2\cdot t=6{,}4+4\cdot t \Rightarrow 6\cdot t=2{,}4 \Rightarrow$
$\Rightarrow t=0{,}4s$.
Για το έργο της τριβής ολίσθησης στο οριζόντιο επίπεδο θα έχουμε:

1. Σε χρόνο t=0,4s είναι υ_κ= υ-α΄·t=8,8-2·0,4=8m/s και ω΄=ω+$\alpha_{\gamma\omega\nu}$΄·t=32+20·0,4= =40rad/s και ακόμη ω΄R=8m/s=υ_κ. Άρα η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου θα γίνει $K'=\frac{1}{2}m\upsilon_\kappa{}^2+\frac{1}{2}I\,\omega'^2$ ή $K'=2\cdot 8^2+0{,}04\cdot 40^2 \Rightarrow K'=192J$. Ενώ η κινητική του ενέργεια τη στιγμή που έφτασε στο οριζόντιο επίπεδο ήταν K=195,84J, οπότε έχουμε «απώλεια» ενέργειας ΔΕ΄=192-195,84=-3,84J.

2.Ακόμη μπορούμε να πούμε ότι το Κ.Μ του κυλίνδρου μετατοπίζεται στο οριζόντιο επίπεδο κατά $s=\upsilon\cdot t-\frac{1}{2}\alpha'\cdot t^2=8{,}8\cdot 0{,}4-0{,}16=3{,}36m$ ενώ το διάστημα που διαγράφει ο κύλινδρος κυλιόμενος είναι $s'=R\cdot\theta'$ με $\theta'=\omega\cdot t+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}'\cdot t^2 \Rightarrow \theta'=32\cdot 0{,}4+\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 0{,}4^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ θ΄=14,4rad και s΄=R·θ΄=2,88m. Τότε ο κύλινδρος μετατοπίζεται ολισθαίνοντας κατά Δs=3,36-2,88=0,48m. Για την τριβή ολίσθησης έχουμε T=μmg=8N και W_T=-T·Δs=-8·0,48=-3,84J.

3.Το κατώτερο σημείο του κυλίνδρου που βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο έχει ταχύτητα $V=\upsilon_\kappa-\omega'\cdot R$. Αρχικά υ_κ=υ=8,8m/s και ω΄=ω=32rad/s, άρα V=8,8-32·0,2=2,4m/s ενώ για το μέτρο της επιτάχυνσης είναι
*$a=\alpha'+\alpha_{\gamma\omega\nu}'\cdot R=2+20\cdot 0{,}2=6m/s^2$.
Άρα σε χρόνο t=0,4s θα μετατοπιστεί κατά $\Delta s=V\cdot t-\frac{1}{2}a\cdot t^2=2{,}4\cdot 0{,}4-3\cdot 0{,}4^2=0{,}48m$.
Τότε W_T=-T·Δs=-8·0,48=-3,84J, όπως και προηγουμένως.

*Ισχύει υ_κ= υ-α΄·t και ω΄=ω+ $\alpha_{\gamma\omega\nu}$΄·t. Τότε $V=\upsilon_\kappa-\omega'\cdot R \Rightarrow V=\upsilon-\alpha'\cdot t-\omega\cdot R-\alpha_{\gamma\omega\nu}'\cdot R\cdot t \Rightarrow$
$\Rightarrow V=\upsilon-\omega\cdot R-(\alpha'+\alpha_{\gamma\omega\nu}'\cdot R)\cdot t \Rightarrow V=\upsilon-\omega\cdot R-a\cdot t \Rightarrow V=2{,}4-6\cdot t$, άρα πράγματι ισχύει $a=\alpha'+\alpha_{\gamma\omega\nu}'\cdot R$.
Παρατηρήστε ακόμη ότι για t=0,4s είναι V=2,4-6·t=0m/s, άρα έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση.

ε) Για κύλιση χωρίς ολίσθηση στο πλάγιο επίπεδο έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $mg\eta\mu\varphi-T_{\sigma\tau}=m\alpha$ (1)
Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}\cdot R=\frac{1}{2}mR^2\frac{\alpha}{R} \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}m\cdot\alpha$ (2).
Από τις (1)∧(2)$\Rightarrow mg\eta\mu\varphi=\frac{3}{2}m\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{2g\eta\mu\varphi}{3}$.
Όμως $T_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}m\cdot\alpha \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}m\cdot\frac{2g\eta\mu\varphi}{3} \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{mg\eta\mu\varphi}{3}$. Για κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $T_{\sigma\tau}\leq\mu\cdot N \Rightarrow \frac{mg\eta\mu\varphi}{3}\leq\mu\cdot mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi\leq 3\mu \Rightarrow$
$\Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi\leq 0{,}6$ ή $\varphi\leq 31^0$.