Θ.Μ.Κ.Ε σε κινούμενο γιο- γιο.

Ο λεπτός σωλήνας του σχήματος έχει μάζα m=1Kg και ακτίνα R=0,1m. Τη χρονική στιγμή t=0, αφήνουμε το σωλήνα ελεύθερο να κινηθεί κατακόρυφα, ενώ το σημείο Γ παραμένει ακίνητο.

Όταν θα έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους L=2,5m:

A)

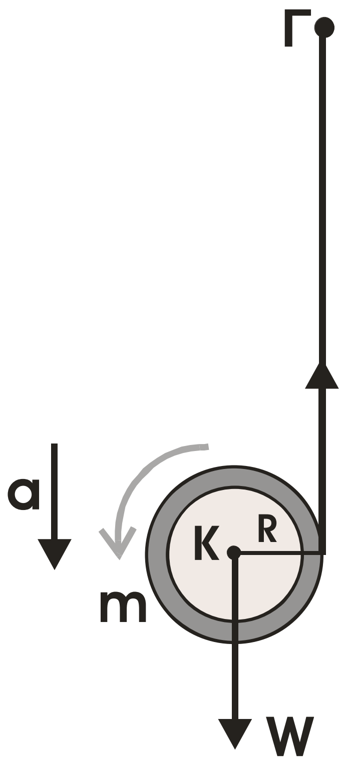
α) Να υπολογιστεί η κινητική του ενέργεια.

β) Σε πόσο χρόνο ξετυλίγεται το νήμα;

γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος εκείνη τη στιγμή.

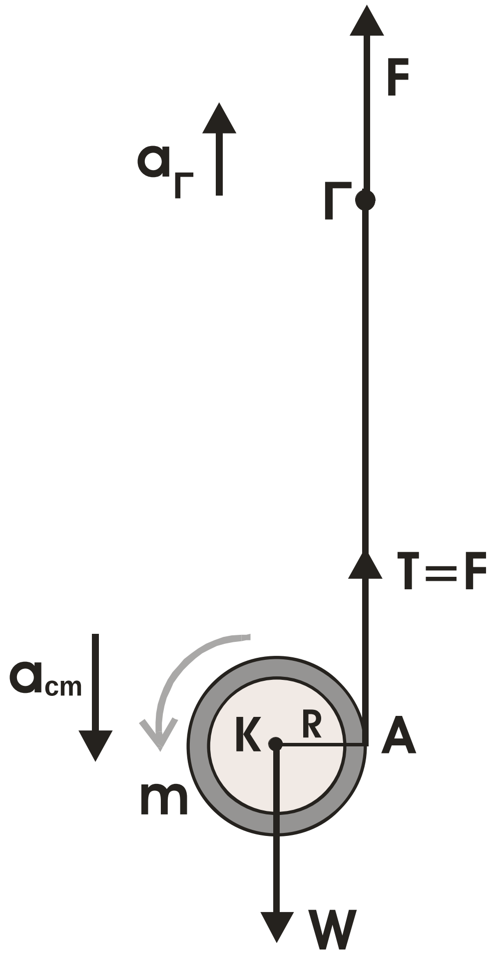
δ) Πόσος είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος λόγω στροφικής και λόγω μεταφορικής κίνησης;

ε) Πόσος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος και πόσος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του;



B) Τη στιγμή που ξετυλίχτηκε το νήμα αρχίζουμε να τραβάμε προς τα πάνω το λεπτό σωλήνα ασκώντας κατακόρυφη δύναμη F, ενώ το σημείο εφαρμογής Γ, της δύναμης επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση $\alpha_\Gamma = \frac{g}{4}\,m/s^2$. Τότε να υπολογίσετε:

α) τη δύναμη F,
β) την κινητική ενέργεια του σωλήνα μετά από χρόνο t=0,8s, από τη στιγμή που άρχισε να ασκείται η δύναμη,
γ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής, στροφικής καθώς και το συνολικό ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σωλήνα εκείνη τη στιγμή.
$g=10m/s^2$.



Λύση:
Α)

α) Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w \Rightarrow K=mgL \Rightarrow K=25J$.
β)
Μεταφορική κίνηση: $W-T=m\cdot α \Rightarrow mg-T=m\cdot α$ (1)
Στροφική κίνηση: $TR=mR^2α_{γων} \Rightarrow T=mRα_{γων} \Rightarrow T=m\cdot α$ (2).
$(1)\wedge(2) \Rightarrow mg=m\cdot α+ m\cdot α \Rightarrow α=\frac{g}{2} \Rightarrow α=5m/s^2$. Τότε $L=\frac{1}{2}\cdot α\cdot t^2 \Rightarrow t=1s$.
γ) Ισχύει $υ=α\cdot t \Rightarrow υ=5m/s$. Τότε έχουμε $\frac{ΔK}{Δt}=m\cdot g\cdot υ \Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}=50J/s$.
δ) $T=m\cdot α \Rightarrow T=5N$. $(\frac{ΔK}{Δt})_{μετ}=(m\cdot g-T)\cdot υ \Rightarrow (\frac{ΔK}{Δt})_{μετ}=25\ J/s$.
$(\frac{ΔK}{Δt})_{στρ}=τ\cdot ω \Rightarrow (\frac{ΔK}{Δt})_{στρ}=T\cdot R\cdot ω \Rightarrow (\frac{ΔK}{Δt})_{στρ}=T\cdot υ \Rightarrow (\frac{ΔK}{Δt})_{στρ}=25\ J/s$.
Ισχύει: $\frac{ΔK}{Δt}=(\frac{ΔK}{Δt})_{μετ}+(\frac{ΔK}{Δt})_{στρ}$.
ε) $\frac{ΔL}{Δt}=Στ=T\cdot R=0,5Kgm^2/s^2$. Ακόμη $\frac{ΔP}{Δt}=ΣF=m\cdot g-T=m\cdot α=5\ Kgm/s^2$.
Β)
α)Αν σε χρόνο dt, ξετυλιχθεί νήμα μήκους $dL=R\cdot dθ$, και στον ίδιο χρόνο το σημείο Γ, ανεβεί κατά $dy_Γ$, τότε το κέντρο μάζας του στερεού μετατοπίζεται κατακόρυφα κατά $dy_K= R\cdot dθ- dy_Γ$ ή

$\upsilon_{cm}=\omega\cdot R-\upsilon_\Gamma$ ή $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R-\alpha_\Gamma \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{cm}+\alpha_\Gamma$.

Ισχύει:
Μεταφορική κίνηση: $mg-T=m\cdot\alpha_{cm}$ (1)
Στροφική κίνηση: $TR=mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T=m\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ (2).

$(1)\wedge(2) \Rightarrow mg=m\cdot\alpha_{cm}+m\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}R \Rightarrow g=\alpha_{cm}+\alpha_{cm}+\alpha_\Gamma \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{g-\alpha_\Gamma}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{3g}{8} \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{15}{4}m/s^2$ και $\alpha_\Gamma=\frac{g}{4}m/s^2=2{,}5m/s^2$.

$(1) \Rightarrow T=mg-m\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow T=6{,}25N$. Άρα $F=T=6{,}25N$.

β) Ισχύει $y_K=\frac{1}{2}\cdot\alpha_{cm}\cdot t^2 \Rightarrow y_K=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot 0{,}64 \Rightarrow y_K=1{,}2m$ και

$y_\Gamma=\frac{1}{2}\cdot\alpha_\Gamma\cdot t^2 \Rightarrow y_\Gamma=\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 0{,}64 \Rightarrow y_\Gamma=0{,}8m$. Τότε ακόμη ισχύει $y_K=L-y_\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow L=y_K+y_\Gamma \Rightarrow L=2m$. Επίσης ισχύει $L=R\cdot\theta \Rightarrow L=R\cdot\frac{1}{2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow L=\frac{1}{2}\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_\Gamma)\cdot t^2 \Rightarrow L=\frac{1}{2}\cdot(\frac{15}{4}+2{,}5)\cdot 0{,}64 \Rightarrow L=2m$.

Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w+W_T \Rightarrow K=m\cdot g\cdot y_K+T\cdot y_\Gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow K=10\cdot 1{,}2+6{,}25\cdot 0{,}8 \Rightarrow K=12+5 \Rightarrow K=17J$.

Παρόμοια έχουμε: $\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t \Rightarrow \upsilon_{cm}=\frac{15}{4}\cdot 0{,}8 \Rightarrow \upsilon_{cm}=3m/s$. Και $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$

όπου $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{cm}+\alpha_\Gamma \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=(\alpha_{cm}+\alpha_\Gamma)/R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=62{,}5rad/s^2$. Άρα
$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \Rightarrow \omega=62{,}5\cdot 0{,}8 \Rightarrow \omega=50rad/s$.

Οπότε $K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2\cdot\omega^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow K=\frac{1}{2}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 25 \Rightarrow K=17J$.

γ) $(\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\mu\varepsilon\tau}=(m\cdot g-T)\cdot\upsilon_{cm} \Rightarrow (\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\mu\varepsilon\tau}=(10-6{,}25)\cdot 3=11{,}25$ J/s.

$(\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\sigma\tau\rho}=\tau\cdot\omega \Rightarrow (\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\sigma\tau\rho}=T\cdot R\cdot\omega \Rightarrow (\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\sigma\tau\rho}=6{,}25\cdot 0{,}1\cdot 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\sigma\tau\rho}=31{,}25$ J/s.

Άρα για τον ολικό ρυθμό θα έχουμε $\frac{\Delta K}{\Delta t}=(\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\mu\varepsilon\tau}+(\frac{\Delta K}{\Delta t})_{\sigma\tau\rho} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=11{,}25+31{,}25 \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=42{,}5J/s$.

Ακόμη για τον ολικό ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας μπορούμε να πούμε: $\frac{\Delta K}{\Delta t}=m\cdot g\cdot \upsilon_{cm}+T\cdot \upsilon_\Gamma \Rightarrow$όπου $\upsilon_\Gamma=\alpha_\Gamma\cdot t\Rightarrow \upsilon_\Gamma=2{,}5\cdot 0{,}8\Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon_\Gamma=2m/s$.
$\frac{\Delta K}{\Delta t}=10\cdot 3+6{,}25\cdot 2\Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=42{,}5J/s$.

Μιχαήλ Π. Μιχαήλ
Φυσικός