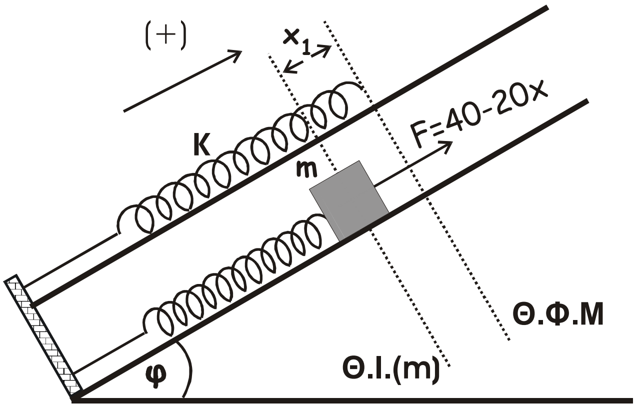
ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ένα σώμα μάζας m=4Kg ισορροπεί δεμένο σε ελατήριο σταθεράς K=80N/m πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi=30^0$. Τη χρονική στιγμή t=0 εξασκούμε στο σώμα μια μεταβλητή δύναμη F=40-20x (S.I) όπου x είναι η απομάκρυνση από την αρχική θέση ισορροπίας της μάζας m και με φορά προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα πραγματοποιεί α.α.τ,

β) Να γράψετε την εξίσωση x(t) της α.α.τ, και να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης.

γ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της μεταβλητής δύναμης F(t).

δ) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με την απόσταση από την αρχική θέση ισορροπίας της μάζας m.

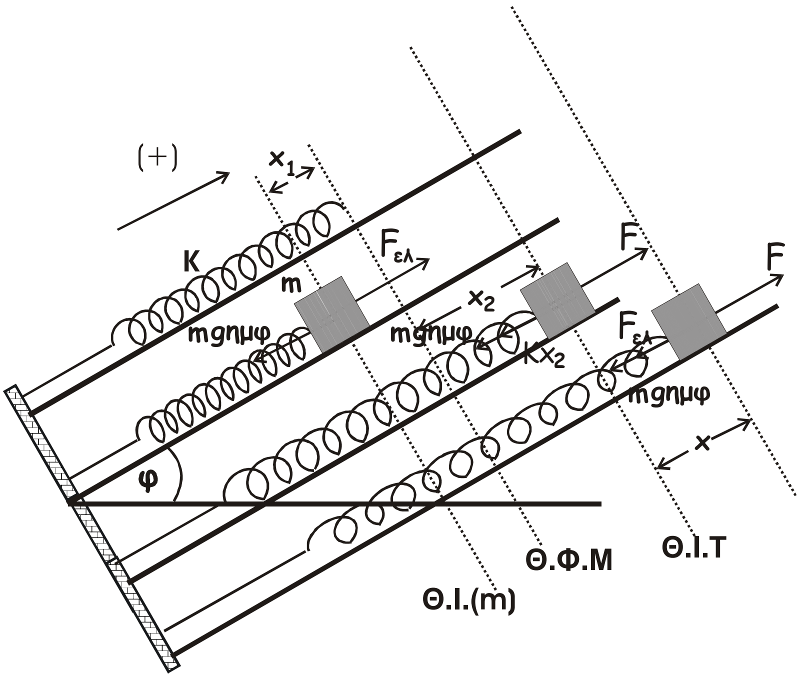
ε) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μάζας m, τη χρονική στιγμή $t=\dfrac{\pi}{20}$ s.

στ) Αν τη στιγμή που η μάζα m, μετατοπιστεί κατά +A από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης καταργηθεί η εξωτερική δύναμη F, τότε πόση είναι η προσφερόμενη ενέργεια στο σύστημα από τη δύναμη F;

Θεωρείστε την προς τα πάνω φορά θετική. Δίνεται $g=10m/s^2$

Λύση:

α) Στη θέση ισορροπίας της μάζας m και πριν εξασκήσουμε τη δύναμη F, ισχύει



$\Sigma F=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=mg\eta\mu\varphi \Rightarrow Kx_1=mg\eta\mu 30^0 \Rightarrow x_1=\frac{20}{80}=0{,}25m$ ή 25cm.

Στη θέση ισορροπίας ταλάντωσης της μάζας m θα πρέπει να ισχύει

$\Sigma F=0 \Rightarrow F=mg\eta\mu 30^0+Kx_2 \Rightarrow 40-20(x_1+x_2)-20-80x_2=0 \Rightarrow 40-5-20x_2-20-80x_2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=\frac{15}{100} \Rightarrow x_2=0{,}15m$ ή 15cm.

Στην τυχαία θέση ισχύει $\Sigma F= F-mg\eta\mu 30^0-K(x_2+x) \Rightarrow$

$\Sigma F= 40-20(x_1+x_2+x)-mg\eta\mu 30^0-Kx_2-Kx \Rightarrow \Sigma F=40-20(x_1+x_2)-20x-20-80x_2-80x \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma F=-100x$ που είναι μια εξίσωση της μορφής $\Sigma F=-Dx$, άρα πράγματι το σύστημά μας πραγματοποιεί α.α.τ με D=100N/m.

Τότε όμως ο πλάτος Α της ταλάντωσης θα είναι $A=x_1+x_2=25+15=40cm$ ή 0,4m.

β) Για t=0 είναι x=-A αφού η προς τα πάνω φορά είναι η θετική. Οπότε από τη γενική εξίσωση της α.α.τ: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ προκύπτει $\varphi_0=\frac{3\pi}{2}$ rad. Ακόμη είναι $D=m\omega^2 \Rightarrow \omega=5rad/s$. Τελικά για την εξίσωση της α.α.τ θα έχουμε

$x=0{,}4\eta\mu(5t+\frac{3\pi}{2})$ (S.I). Για την ενέργεια της ταλάντωσης ισχύει, $E=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2 \Rightarrow E=8J$.

γ) $F=40-20(x+0{,}4) \Rightarrow F=32-20\cdot 0{,}4\eta\mu(5t+\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow F=32-8\eta\mu(5t+\frac{3\pi}{2})$ (S.I).

δ) Για τη δύναμη επαναφοράς ισχύει $\Sigma F=-D\cdot x$, όπου x είναι η απομάκρυνση από τη Θ.Ι.Τ. Όμως ισχύει $x'=x_1+x_2+x \Rightarrow x= x'-x_1-x_2 \Rightarrow x= x'-0{,}4$, άρα έχουμε,

$\Rightarrow \Sigma F=-Dx \Rightarrow \Sigma F=-D(x'-0{,}4) \Rightarrow \Sigma F=40-100x'$ (S.I).

ε) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μάζας m, ισχύει,

$\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-D·x·υ⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$= - D·A·ημφ·ω·A·συνφ με (φ=ωt+φ_0) άρα

$\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-$\frac{DA^2\omega}{2}$·2 ημφ·συνφ ⇒ $\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-E·ω·ημ2φ με E=$\frac{DA^2}{2}$=8J.

Άρα προκύπτει $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -40·ημ(2ωt+2$\varphi_0$)⇒ $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -40·ημ(10t+3π).

Τότε για t= $\frac{\pi}{20}$ s έχουμε, $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -40·ημ(10·$\frac{\pi}{20}$ +3π)⇒ $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -40·ημ($\frac{7\pi}{2}$)⇒

⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -40·ημ(-$\frac{\pi}{2}$)⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$= 40J/s.

Αλλιώς,

μπορούμε για t=$\frac{\pi}{20}$s να υπολογίσουμε την απομάκρυνση x του σώματος, οπότε έχουμε, x=0,4ημ(5t+ $\frac{3\pi}{2}$)⇒ x=0,4ημ(5·$\frac{\pi}{20}$ + $\frac{3\pi}{2}$)⇒

⇒ x=0,4·ημ($\frac{7\pi}{4}$)⇒x=0,4ημ(-$\frac{\pi}{4}$)⇒x=-0,4·$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇒ x=-0,2·$\sqrt{2}$ m

και την ταχύτητα ταλάντωσης,

υ=2συν(5t+ $\frac{3\pi}{2}$)⇒ υ=2συν($\frac{7\pi}{4}$)⇒υ=2συν($\frac{\pi}{4}$)⇒υ=2·$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇒ υ=$\sqrt{2}$ m/s.

Τελικά έχουμε, $\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-D·x·υ⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-100·(-0,2·$\sqrt{2}$)·$\sqrt{2}$ ⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$=40J/s.

στ) Όταν καταργηθεί η δύναμη F τότε το σύστημα θα πραγματοποιεί α.α.τ γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας της μάζας m με σταθερά επαναφοράς D΄=K=80N/m. Άρα το καινούργιο πλάτος ταλάντωσης θα είναι A΄=0,8m, οπότε και η ενέργεια της καινούργιας ταλάντωσης θα είναι E΄=$\frac{1}{2}$·K·A'^2⇒E΄=40·0,64⇒ E΄=25,6J. Όμως η ενέργεια ταλάντωσης E΄ είναι ίση με το έργο της εξωτερικής δύναμης F που ασκήσαμε στο σώμα για να το θέσουμε σε ταλάντωση. Άρα ισχύει W_F= E΄=25,6J.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Βέβαια το έργο της μεταβλητής δύναμης F μπορούμε να το υπολογίσουμε και με γραφική παράσταση οπότε έχουμε, για x=0 είναι F= F=40-20x=40N και για x=A΄=2A=0,8m είναι F=24N. Η γραφική παράσταση είναι η διπλανή, οπότε από το εμβαδό του τραπεζίου που σχηματίστηκε είναι W_F =$\frac{64}{2}$·0,8⇒ W_F=25,6J=E΄.