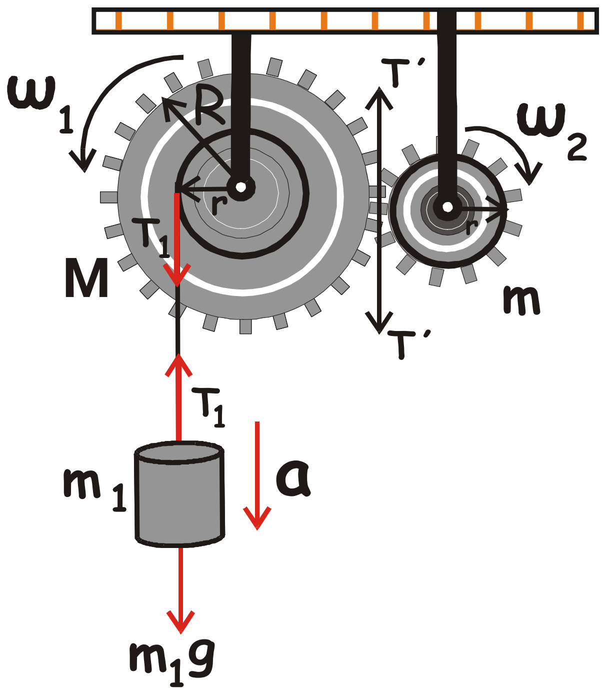
Σύστημα οδοντωτών τροχών

Η διάταξη του σχήματος αποτελείται από δυο οδοντωτούς τροχούς. Ο πιο μεγάλος έχει ροπή αδράνειας $I_1=18\cdot10^{-2}Kg\cdot m^2$ και ακτίνα R=0,4m. Ο μικρός τροχός έχει $I_2=2\cdot10^{-2}Kg\cdot m^2$ και ακτίνα r=0,2m. Γύρω από το μεγαλύτερο τροχό και σε απόσταση r=0,2m υπάρχει ένα αυλάκι, μέσα στο οποίο είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί. Στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού είναι δεμένο ένα σώμα μάζας $m_1= =\frac{13}{8}Kg$.



Κάποια στιγμή αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο.

α) Αν το νήμα ξετυλιχθεί κατά L=1m, τότε να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα ω_1 του μεγαλύτερου οδοντωτού τροχού

β) Ποιος είναι ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας εκείνη τη στιγμή

γ) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.

δ) Να υπολογιστεί η συνολική ροπή σε κάθε τροχό

ε) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση της μάζας m_1 με τους Νόμους του Newton.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

α) Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w \Rightarrow m_1\cdot g\cdot L=\frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\omega_1^2+\frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\omega_2^2+\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2$ (1), όπου υ_1 είναι η ταχύτητα της μάζας m_1 τη στιγμή που ξετυλίγεται το νήμα.

$I_1=18\cdot10^{-2}$ $Kg\cdot m^2$ και $I_2=2\cdot10^{-2}$ $Kg\cdot m^2$.

Ακόμη για την κοινή γραμμική ταχύτητα όλων των σημείων της περιφέρειας για το σύστημα των οδοντωτών τροχών ισχύει $\upsilon=\omega_1\cdot R=\omega_2 r \Rightarrow \omega_2=\omega_1\cdot\frac{R}{r}\Rightarrow$ $\omega_2=2\cdot\omega_1$ και $\upsilon_1=\omega_1\cdot r$.

Τότε (1)$\Rightarrow\omega_1=10rad/s$.

β) $\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=m_1\cdot g\cdot\upsilon_1=\frac{13}{8}\cdot20=32,5J/s$, όπου $\upsilon_1=\omega_1\cdot r=10\cdot0,2=2m/s$.

γ) Ισχύει $\upsilon_1^2=2\cdot\alpha\cdot L\Rightarrow\alpha=\frac{\upsilon_1^2}{2L}=2m/s^2$.

Για τη μάζα m_1 ισχύει $m_1\cdot g-T_1=m_1\cdot\alpha\Rightarrow T_1=m_1\cdot(g-\alpha)\Rightarrow T_1=\frac{13}{8}\cdot8\Rightarrow T_1=13N$.

δ) Για το μεγάλο τροχό έχουμε, $\Sigma\tau_1=T_1\cdot r-T'\cdot R=I_1\cdot \alpha_{1\gamma\omega\nu}$, (1) όπου $I_1=18\cdot 10^{-2}Kg\cdot m^2$ και T' είναι η εφαπτομενική δύναμη ανάμεσα στους δυο οδοντωτούς τροχούς.

Για το μεγάλο τροχό ισχύει $\upsilon_\gamma=\omega_1\cdot r\Rightarrow \alpha=\alpha_{1\gamma\omega\nu}\cdot r\Rightarrow \alpha_{1\gamma\omega\nu}=\dfrac{\alpha}{r}=\dfrac{2}{0,2}=10rad/s^2$.

Επειδή $\omega_2=2\cdot\omega_1\Rightarrow \alpha_{2\gamma\omega\nu}=2\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu}=20rad/s^2$.

Τότε $\Sigma\tau_1=T_1\cdot r-T'\cdot R=I_1\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu}=18\cdot 10^{-2}\cdot 10=1,8\ N\cdot m$.
Για το μικρότερο τροχό είναι $I_2=2\cdot 10^{-2}Kg\cdot m^2$ και ισχύει $\Sigma\tau_2=T'\cdot r=I_2\cdot\alpha_{2\gamma\omega\nu}$ (2)
Οπότε έχουμε $\Sigma\tau_2=0,4\ N\cdot m$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Από τις σχέσεις (1) έχουμε $T_1\cdot r-2T'\cdot r=I_1\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu}$ και (2)$\Rightarrow T'\cdot r=I_2\cdot\alpha_{2\gamma\omega\nu}\Rightarrow$
$\Rightarrow 2T'\cdot r=2\cdot I_2\cdot\alpha_{2\gamma\omega\nu}$, με πρόσθεση κατά μέλη είναι $T_1\cdot r=I_1\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu}+2\cdot I_2\cdot\alpha_{2\gamma\omega\nu}=2,6N\cdot m$, που πράγματι ισχύει.

Ακόμη από τη σχέση (2) $T'\cdot r=I_2\cdot\alpha_{2\gamma\omega\nu}\Rightarrow T'=2N$.

ε) Για τη στροφική κίνηση του τροχού ακτίνας R ισχύει,
$\Sigma\tau_1=I_1\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu}\Rightarrow T_1\cdot r-T'\cdot R=I_1\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu}\Rightarrow T_1\cdot r-2\cdot T'\cdot r=I_1\cdot\dfrac{\alpha}{r}\Rightarrow T_1-2\cdot T'=I_1\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}$ (1)
Για τη μεταφορική κίνηση της m_1 ισχύει , $m_1\cdot g-T_1=m_1\cdot\alpha$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει , $m_1\cdot g-2\cdot T'=I_1\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}+m_1\cdot\alpha$ (3)

Για τη στροφική κίνηση του τροχού ακτίνας r ισχύει, $\Sigma\tau_2=T'\cdot r=I_2\cdot\alpha_{2\gamma\omega\nu}\Rightarrow$
$\Rightarrow T'\cdot r=2I_2\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu}\Rightarrow T'\cdot r=2I_2\cdot\dfrac{\alpha}{r}\Rightarrow T'=2I_2\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}\Rightarrow 2T'=4I_2\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}$ (4). Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4) προκύπτει , $m_1\cdot g=I_1\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}+4I_2\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}+m_1\cdot\alpha\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{13}{8}\cdot 10=0,18\cdot\frac{\alpha}{0,04}+4\cdot 0,02\cdot\frac{\alpha}{0,04}+\frac{13}{8}\cdot\alpha\Rightarrow\frac{130}{8}=\frac{18}{4}\cdot\alpha+2\cdot\alpha+\frac{13}{8}\cdot\alpha\Rightarrow\frac{130}{8}=\frac{65}{8}\cdot\alpha\Rightarrow$$

$\Rightarrow\alpha=2m/s^2$ που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε δουλεύοντας ενεργειακά.

Τότε επαληθεύουμε και τις τιμές των T_1 και T'. Πράγματι
$T'=2I_2\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}\Rightarrow T'=2\cdot 0,02\cdot\dfrac{2}{0,04}\Rightarrow T'=2N$ και (1)$\Rightarrow T_1=2\cdot T'+I_1\cdot\dfrac{\alpha}{r^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow T_1=2\cdot 2+0,18\cdot\dfrac{2}{0,04}\Rightarrow T_1=4+9\Rightarrow T_1=13N$.