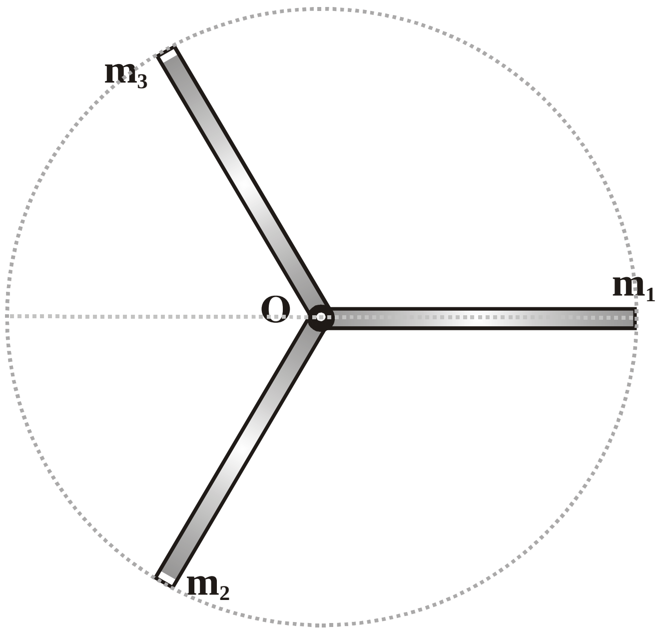
ΡΑΒΔΟΙ

Οι τρεις ράβδοι m_1,m_2 και m_3 του σχήματος ίδιου μήκους L=0,6m, συγκολλούνται στο ένα άκρο τους Ο και σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^0. Το σύστημα των τριών ράβδων μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από οριζόντιο πείρο, κάθετο στο επίπεδό τους, που περνάει από το κοινό τους άκρο Ο.



Κάποια στιγμή το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να περιστραφεί από τη θέση που φαίνεται στο σχήμα. Τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος και η αντίδραση από τον πείρο τη στιγμή της εκκίνησης,

β) Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μόλις η m_3 γίνει κατακόρυφη;

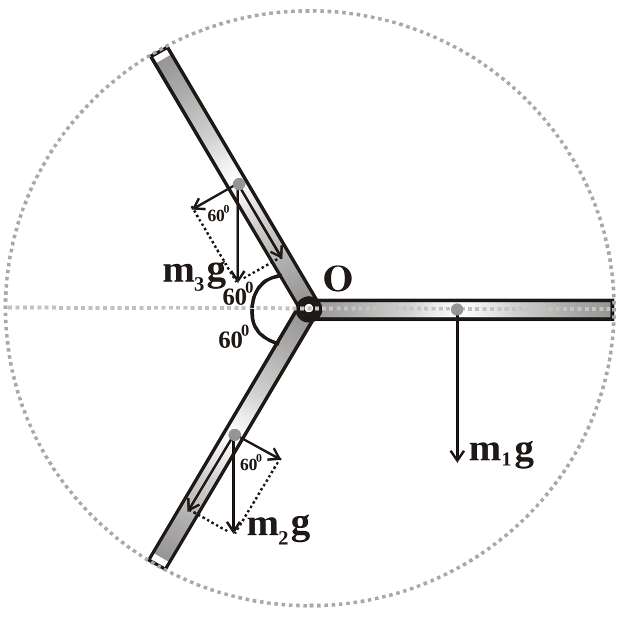
γ) Σε ποια θέση το σύστημα των τριών ράβδων έχει γωνιακή επιτάχυνση ίση με μηδέν;

δ) Για ποια γωνία περιστροφής σταματάει στιγμιαία η περιστροφή;

ε) Αν όλες οι ράβδοι είχαν την ίδια μάζα τότε είναι σωστό να πούμε ότι το σύστημα ισορροπεί σε οποιαδήποτε θέση;

στ) Αν τη στιγμή που η m_3 γίνει κατακόρυφη, το ελεύθερο άκρο της ράβδου με μάζα m_2 συγκρούεται πλαστικά με σημειακή μάζα m΄, που κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με $υ=\sqrt{3}$ m/s, τότε ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση; Δίνονται $m_1=2m$, $m_2=m_3=m$, όπου m=1Kg και $g=10m/s^2$. Ακόμη η ροπή αδράνειας ράβδου μάζας m και μήκους L γύρω από άξονα που περνάει από το ένα άκρο της είναι $I=\frac{1}{3}ML^2$.

Λύση:



α) Ισχύει: $I_1=\frac{1}{3}m_1\cdot L^2 \Rightarrow I_1=\frac{2}{3}m\cdot L^2$ και

$I_2=I_3=\frac{1}{3}m_2\cdot L^2=\frac{1}{3}m\cdot L^2$.

Τότε είναι $I_{ολ}=I_1+2I_2 \Rightarrow I_{ολ}=\frac{4}{3}m\cdot L^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_{ολ}=\frac{3}{4}m=\frac{3}{4}Kg\cdot m^2$.

$Στ=I_{ολ}\cdot α_{γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 g\frac{L}{2}-m_2 g\frac{L}{2}συν60^0-m_3 g\frac{L}{2}συν60^0$

$=\frac{3}{4}m\cdot α_{γων} \Rightarrow$

ΡΑΒΔΟΙ

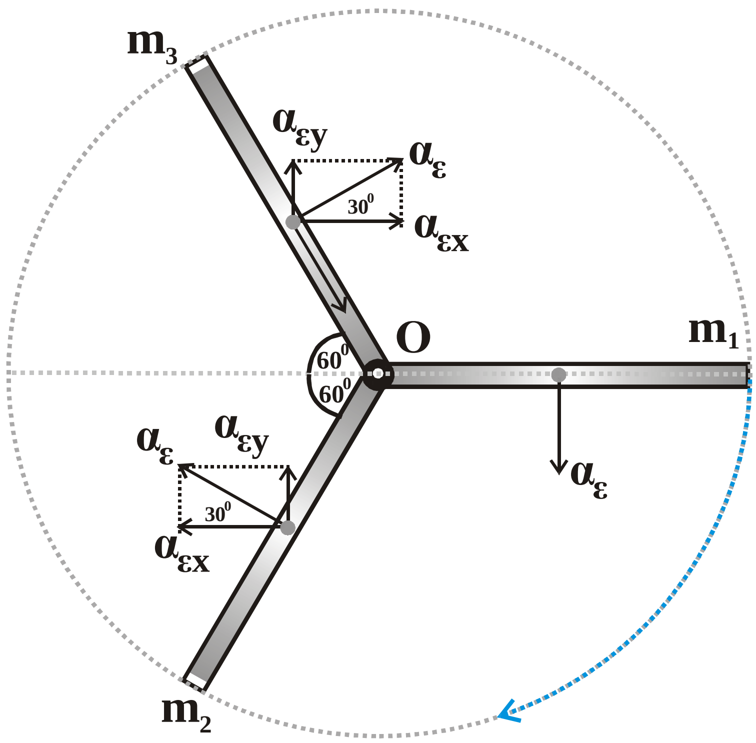
$\Rightarrow 2mg\frac{L}{2}-mg\frac{L}{2}συν60^0-mg\frac{L}{2}συν60^0=\frac{3}{4}m\cdot α_{γων}\Rightarrow 2mg\frac{L}{2}-mg\frac{L}{2}=\frac{3}{4}m\cdot α_{γων}\Rightarrow$

$\Rightarrow mg\frac{L}{2}=\frac{3}{4}m\cdot α_{γων}\Rightarrow α_{γων}=\frac{2gL}{3}\Rightarrow α_{γων}=\frac{2g}{5}=4rad/s^2$.

Για την επιτρόχιο επιτάχυνση της m_1 ισχύει: $α_ε=α_{γων}\cdot\frac{L}{2}$, βέβαια κεντρομόλος επιτάχυνση αρχικά δεν υπάρχει αφού $υ_{γρ}=0$.
Ακόμη για τη m_2: $α_{εx}=α_ε\cdot συν30^0$ και $α_{εy}=α_ε\cdot ημ30^0$, παρόμοια για την m_3: $α_{εx}=α_ε\cdot συν30^0$ και $α_{εy}=α_ε\cdot ημ30^0$. Τότε $ΣF_x=m_2\cdot α_{εx}-m_3\cdot α_{εx}=0\Rightarrow N_x=0$ και $ΣF_y=m_1\cdot α_ε-m_2\cdot α_{εy}-m_3\cdot α_{εy}\Rightarrow ΣF_y=m_1\cdot α_ε-m_2\cdot α_ε ημ30^0-m_3\cdot α_ε ημ30^0\Rightarrow$

$\Rightarrow ΣF_y=2m\cdot α_ε-2m\cdot α_ε\frac{1}{2}\Rightarrow ΣF_y=m\cdot α_ε=m\cdot α_{γων}\cdot\frac{L}{2}\Rightarrow ΣF_y=1{,}2N$.

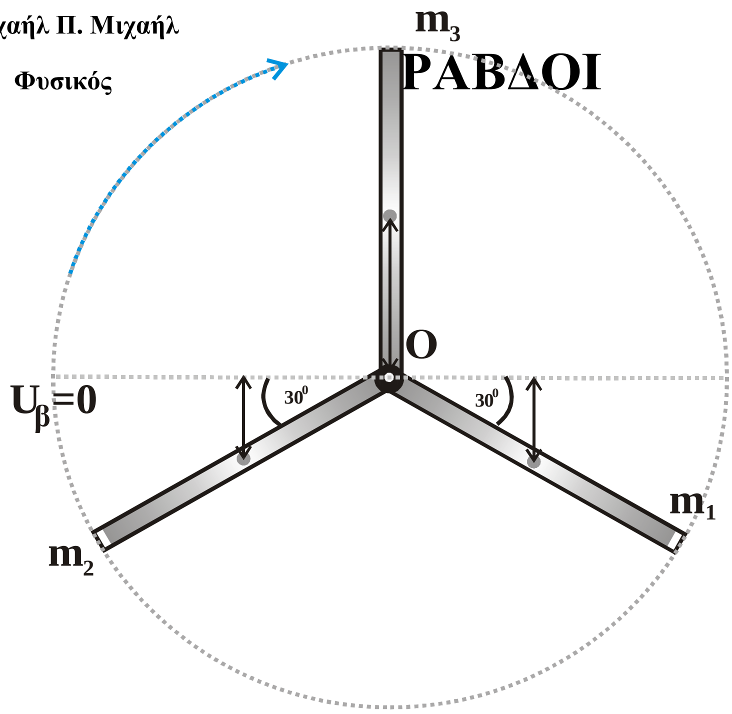
Όμως $ΣF_y=N_y-w_{ολ}\Rightarrow ΣF_y=N_y-4mg\Rightarrow 1{,}2=N_y-40\Rightarrow N_y=41{,}2N$. Άρα $N=N_y=41{,}2N$.



β) Α.Δ.Μ.Ε: $K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}$, όπου $K_{αρχ}=0$ και $U_{αρχ}=U_1+U_2+U_3=$
$=0+m_3g\frac{L}{2}ημ60^0-m_2g\frac{L}{2}ημ60^0=mg\frac{L}{2}ημ60^0-mg\frac{L}{2}ημ60^0=0$, τότε προκύπτει

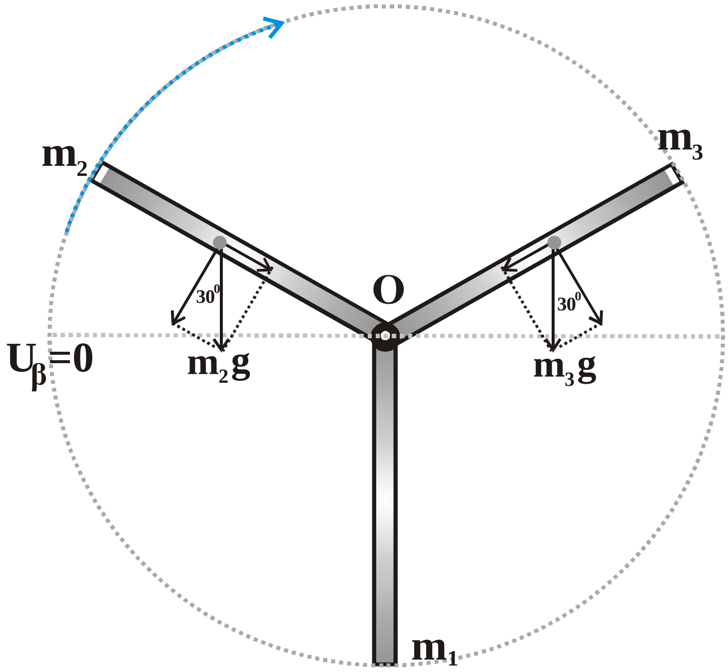
$0=K_{τελ}+U_{τελ}\Rightarrow 0=\frac{1}{2}I_{ολ}\cdot ω^2+m_3g\frac{L}{2}-m_2g\frac{L}{2}\cdot ημ30^0-m_1g\frac{L}{2}\cdot ημ30^0\Rightarrow$

$\Rightarrow 0=\frac{1}{2}\frac{3}{4}m\cdot ω^2+mg\frac{L}{2}-mg\frac{L}{2}ημ30^0-2mg\frac{L}{2}ημ30^0\Rightarrow ω^2=\frac{2gL}{3}\Rightarrow ω=2rad/s$.



γ) Μόλις η μάζα m_1=2m γίνει κατακόρυφη όπως φαίνεται στο σχήμα τότε είναι

$$\Sigma\tau = I_{o\lambda}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow m_2 g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 30^0 - m_3 g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 30^0 = I_{o\lambda}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 0.$$



δ) Έστω ότι το σύστημα των σωμάτων έρχεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα. Τότε είναι:

Α.Δ.Μ.Ε: $K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$$0 + m_3 g\frac{L}{2}\eta\mu 60^0 - m_2 g\frac{L}{2}\eta\mu 60^0 = 0 + m_1 g\frac{L}{2}\eta\mu\varphi_1 + m_2 g\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi_2 - m_3 g\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 = 2mg\frac{L}{2}\eta\mu\varphi_1 + mg\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi_2 - mg\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi_3$ όπου $\varphi_1+\varphi_2+120^0=180^0 \Rightarrow \varphi_2=60^0-\varphi_1$ και $\varphi_2+\varphi_3=120^0 \Rightarrow \varphi_3=60^0+\varphi_1$.

Άρα προκύπτει:

ΡΑΒΔΟΙ

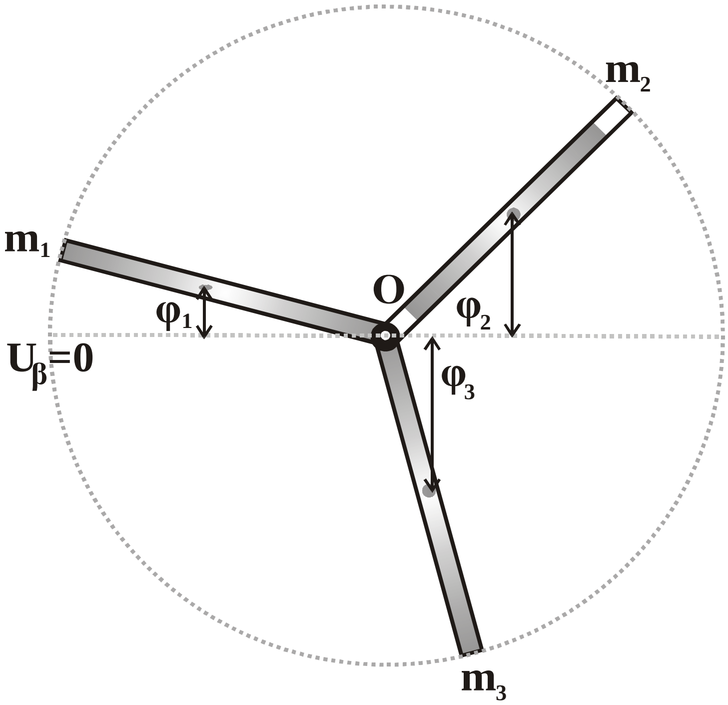
$0= mgL\eta\mu\varphi_1+mg\frac{L}{2}\cdot\eta\mu(60^0-\varphi_1)- mg\frac{L}{2}\cdot\eta\mu(60^0+\varphi_1)\Rightarrow$

$0=mgL\eta\mu\varphi_1+mg\frac{L}{2}\cdot(\eta\mu60^0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_1-\eta\mu\varphi_1\cdot\sigma\upsilon\nu60^0)-mg\frac{L}{2}\cdot(\eta\mu60^0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_1+\eta\mu\varphi_1\cdot\sigma\upsilon\nu60^0)\Rightarrow$

$\Rightarrow0=mgL\eta\mu\varphi_1+mg\frac{L}{2}\cdot(\eta\mu60^0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_1-\eta\mu\varphi_1\cdot\sigma\upsilon\nu60^0-\eta\mu60^0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_1-\eta\mu\varphi_1\cdot\sigma\upsilon\nu60^0)\Rightarrow$

$\Rightarrow0= mgL\eta\mu\varphi_1-2mg\frac{L}{2}\cdot \eta\mu\varphi_1\cdot\sigma\upsilon\nu60^0\Rightarrow0= mgL\eta\mu\varphi_1-mg\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi_1\Rightarrow0=mg\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi_1\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\eta\mu\varphi_1=0\Rightarrow\varphi_1=0^0$. Δηλαδή η γωνία περιστροφής είναι 180^0.



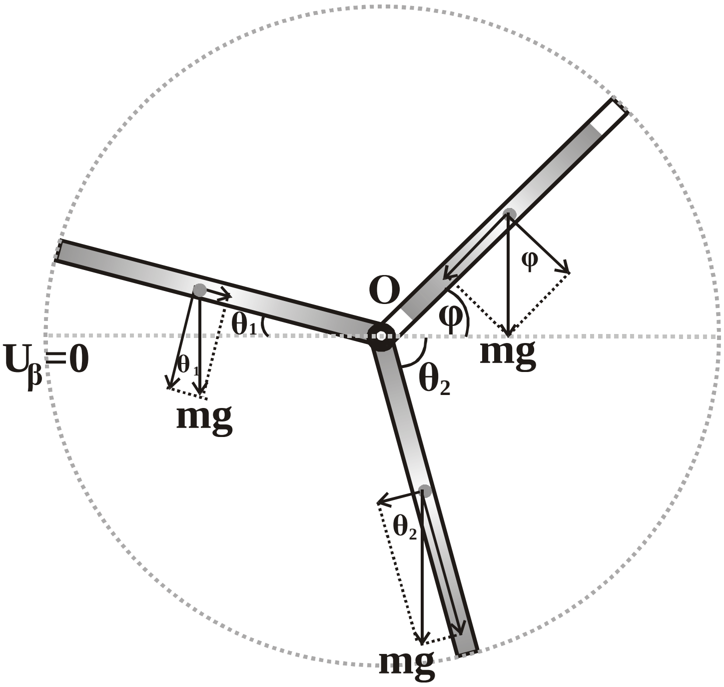
ε) Αν όλες οι ράβδοι είχαν την ίδια μάζα τότε σε μια τυχαία θέση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι $\varphi+\theta_1+120^0=180^0\Rightarrow$ $\theta_1=60^0-\varphi$ και $\varphi+\theta_2=120^0$ $\Rightarrow\theta_2=120^0-\varphi$. Τότε

$\Sigma\tau= mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\frac{L}{2}-mg\sigma\upsilon\nu(60^0-\varphi)\cdot\frac{L}{2}+ mg\sigma\upsilon\nu(120^0-\varphi)\cdot\frac{L}{2}=$

$=mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\frac{L}{2}-mg\frac{L}{2}(\sigma\upsilon\nu60^0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+ \eta\mu60^0\cdot\eta\mu\varphi)+mg\frac{L}{2}(\sigma\upsilon\nu120^0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu120^0\cdot\eta\mu\varphi)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Sigma\tau= mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\frac{L}{2}-2mg\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu60^0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow \Sigma\tau= mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\frac{L}{2}-mg\ \sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\frac{L}{2}\Rightarrow \Sigma\tau=0$, άρα το σύστημα ισορροπεί. Βέβαια τότε το σύστημα των τριών ράβδων δέχεται από τον άξονα περιστροφής κατακόρυφη δύναμη $N=m_{o\lambda}\cdot g=3mg$.

ΡΑΒΔΟΙ



στ) Από την Α.Δ.Σ⇒ $\vec{L}_{ολ}(αρχ)= \vec{L}_{ολ}(τελ)$⇒ $I_{ολ}\cdot ω-m΄υLημ60^0=(I_{ολ}+mL^2)\cdot ω΄$⇒

$\frac{3}{4}m\cdot 2-m\sqrt{3}\cdot 0{,}6\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=(\frac{3}{4}m+0{,}36m)\cdot ω΄⇒ω΄=\frac{60}{111}=0{,}54rad/s.$