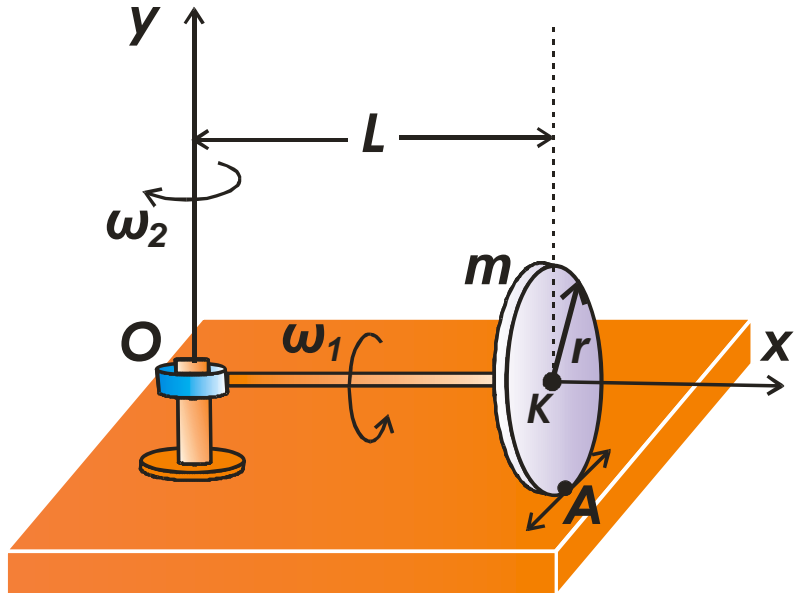


ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΔΙΣΚΟΥ

Ένας ομογενής δίσκος μάζας $m=4\text{Kg}$ και ακτίνας $r=5\text{cm}$, τοποθετείται σε άξονα Ox αμελητέας μάζας. Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα Ox με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=6\text{ rad/s}$, ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται και γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oy χωρίς να ολισθαίνει, με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και σε απόσταση $L=12\text{cm}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προσδιορίστε:

- α) τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου,
- β) τη συνολική στροφορμή του, και
- γ) την ολική κινητική του ενέργεια.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου για το κέντρο μάζας του και ως προς τον άξονα Ox ,

$I_x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$, ενώ για τον άξονα Oy και για το κέντρο μάζας του είναι αντίστοιχα

$I_y = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2$.

Λύση:

α) Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oy καθώς επίσης και γύρω από τον άξονα Ox . Επειδή ο δίσκος δεν ολισθαίνει αυτό σημαίνει ότι το σημείο A του δίσκου που βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο έχει ταχύτητα μηδέν. Άρα ισχύει $\omega_2 \cdot L = \omega_1 \cdot r \Rightarrow$

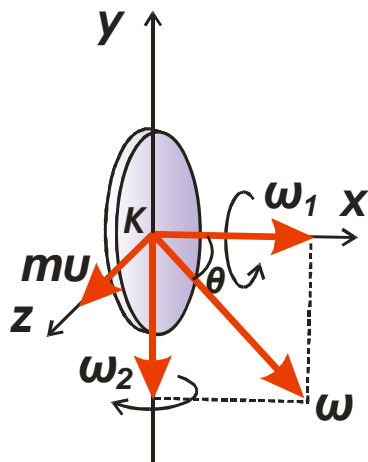
$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{r}{L} = 6 \cdot \frac{5}{12} = 2,5\text{ rad/s}$.

Τα $\vec{\omega}_1$ και $\vec{\omega}_2$, έχουν τις φορές που φαίνεται στο σχήμα οπότε για το μέτρο της συνολικής γωνιακής ταχύτητας

ω , ισχύει $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_1^2 \cdot \frac{r^2}{L^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_1^2 \cdot \frac{r^2}{L^2}} = \frac{\omega_1}{L} \cdot \sqrt{L^2 + r^2} = 50 \cdot 0,13 = 6,5\text{ rad/s}$

και $\epsilon\phi\theta = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0,42$.



β) Για τη στροφορμή του δίσκου ως προς τον άξονα Ox είναι $L_1 = L_x = I_x \cdot \omega_1 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1 = 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 6 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Για τον άξονα Oy ισχύει $L_2 = L_y = I_{y(\text{ολ})} \cdot \omega_2 = \left(\frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot L^2 \right) \cdot \omega_1 \cdot \frac{r}{L} = 15,025 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$

Άρα $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ με $\varepsilon_{\theta'} = 5$

γ) Για την κινητική ενέργεια του δίσκου έχουμε $K_1 = \frac{1}{2} \cdot I_x \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{y(\text{ολ})} \cdot \omega_2^2 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 + \left(m \cdot L^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \right) \cdot \omega_1^2 \cdot \left(\frac{r}{L} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 + m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \left(\frac{r}{L} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot \frac{r^4}{L^2} \cdot \omega_1^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \left(6 + \frac{r^2}{L^2} \right) = 0,5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 36 \cdot \left(6 + 0,1736 \right) = 0,28 \text{ J}.$$