57. Στιγμιότυπο κύματος

Η πηγή Ο (x=0), μιας διαταραχής πραγματοποιεί α.α.τ με εξίσωση $y=0{,}2\cdot ημ10πt$. Το κύμα διαδίδεται προς το +x με ταχύτητα διάδοσης υ=10m/s. Τη χρονική στιγμή t=0,2s το πλάτος της ταλάντωσης της πηγής γίνεται $A'=\frac{A}{2}=0{,}1$m. Τότε:

α) να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=0{,}4$s,
β) να σχεδιάσετε την απομάκρυνση ενός σημείου Σ του μέσου που απέχει απόσταση x=4m από την πηγή Ο σε συνάρτηση με το χρόνο,
γ) Αν δυο σημεία Β και Γ απέχουν από την πηγή Ο απόσταση $x_B=5λ/4$ και $x_Γ=λ/4$, τότε να υπολογίσετε,
i) τη διαφορά φάσης $Δφ_{ΓΒ}$ των δυο σημείων την ίδια χρονική στιγμή και εφόσον έχει φτάσει σε αυτά η διαταραχή και
ii) το λόγο των ταχυτήτων ταλάντωσης $\frac{v_Γ}{v_B}$ τη χρονική στιγμή $t_1=5T/4$ και τη χρονική στιγμή $t_2=7T/4$,
δ) Για μια τυχαία χρονική στιγμή t με $5T/4 \le t \le 2T$, να υπολογίσετε την απόσταση d μεταξύ των δυο σημείων Β και Γ. Πόση γίνεται η απόσταση αυτή τη χρονική στιγμή t=2T;
ε) Κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε πλέον αρχή των χρόνων (t=0) και ενώ η πηγή ταλαντώνεται με εξίσωση $y=A'\cdot ημ10πt$ το πλάτος της A΄ αρχίζει να μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A'=0{,}1\cdot e^{-2t}$, τότε να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t=T=0,2s. Δίνεται $e^{-0{,}1}=0{,}9$.

Συνοπτική Λύση

α) Ισχύει $ω=2πf \Rightarrow f=5$Hz ή T=0,2s και $υ=λf \Rightarrow λ=2$m. Η εξίσωση του κύματος είναι

$y=0{,}2\cdot ημ2π(5t-\frac{x}{2})$ για

$\frac{x}{υ} \le t < \frac{x}{υ}+T$ και

$y=0{,}1\cdot ημ2π(5t-\frac{x}{2})$ για

$t \ge \frac{x}{υ}+T$.

Τη χρονική στιγμή $t_1=0{,}4s=2T$

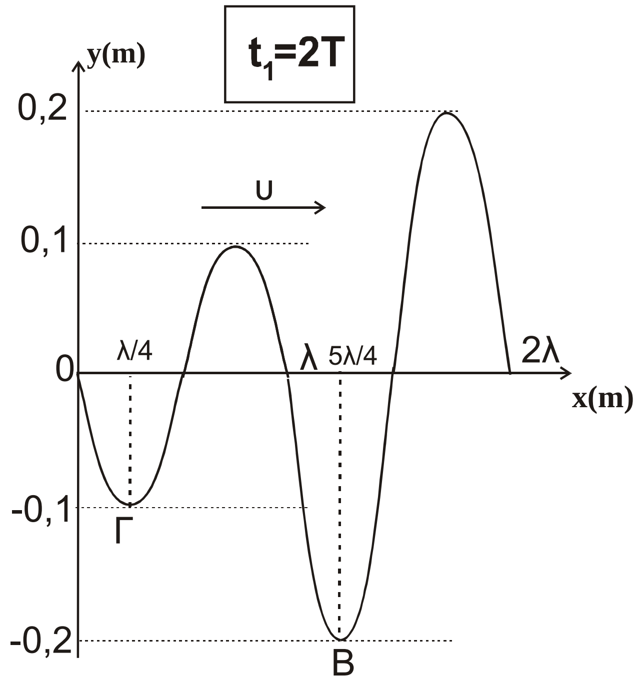
Για x=0 είναι $y=0{,}1\cdot ημ2π(2-\frac{x}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow y=0{,}1\cdot ημ4π=0$

και v>0

Για φ=0 είναι x=2λ=4m και η διαταραχή θα έχει μετατοπιστεί κατά x=4m.

Τη στιγμή όμως που η διαταραχή πλάτους A=0,2m θα έχει διανύσει



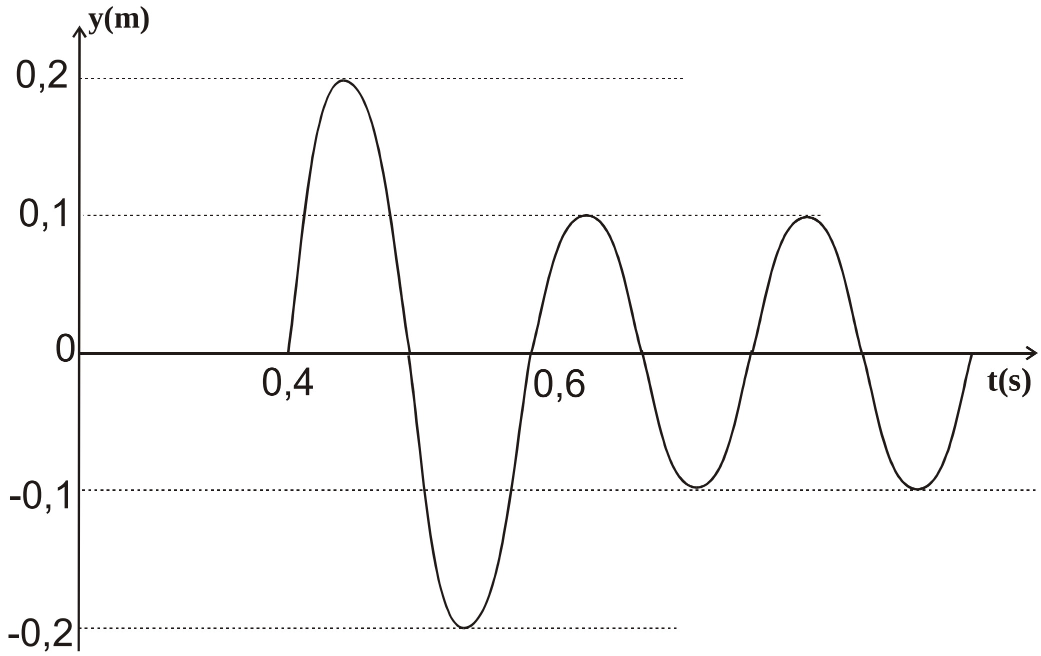
απόσταση x=λ, θα δημιουργηθεί μια δεύτερη με πλάτος 0,1m και το στιγμιότυπο είναι αυτό του σχήματος.

β) Το κύμα θα φτάσει στο σημείο Σ, τη χρονική στιγμή $t=\frac{x}{\upsilon}=0{,}4s$.

Τότε η απομάκρυνση του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο και για $t\geq 0{,}4s$ είναι
$y=0{,}2\cdot ημ2π(5t-2)$ για $0{,}4\leq t\leq 0{,}4+T$ και

$y=0{,}1\cdot ημ2π(5t-2)$ για $t>0{,}4+T$.

Έτσι για την απομάκρυνση του σημείου Σ του μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



γi) Για τη διαφορά φάσης $Δφ_{ΓΒ}$ των δυο σημείων την ίδια χρονική στιγμή και εφόσον έχει φτάσει σε αυτά η διαταραχή έχουμε $Δφ=2π\frac{Δx}{λ} \Rightarrow Δφ=2π$ rad $(Δx=λ)$.

ii) Τη χρονική στιγμή $t_1=5T/4>T$ η απομάκρυνση του σημείου Γ είναι $y_Γ=0$ και το πλάτος του είναι $\frac{A}{2}=0{,}1m$ άρα είναι $v_Γ=ω\frac{A}{2}$. Τότε η απομάκρυνση του σημείου Β είναι $y_B=0$ και το πλάτος του είναι $A=0{,}2m$ άρα είναι $v_B=ωA$. Ο λόγος των ταχυτήτων ταλάντωσης είναι $\frac{v_Γ}{v_B}=\frac{1}{2}$.

Τη χρονική στιγμή $t_2=9T/4$ γίνεται πλέον και το πλάτος ταλάντωσης του Β ίσο με $\frac{A}{2}=0{,}1m$ οπότε είναι και $v_B=ω\frac{A}{2}$ και άρα είναι $\frac{v_Γ}{v_B}=1$.

δ) Για μια τυχαία χρονική στιγμή t με 5T/4≤t≤2T, το πλάτος ταλάντωσης του Γ έχει γίνει $\frac{A}{2}$, ενώ το πλάτος ταλάντωσης του Β είναι ίσο με Α.

Έτσι για την ταλάντωση του Γ έχουμε $y_\Gamma=\frac{A}{2}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{1}{4})=\frac{A}{2}\eta\mu(\omega t-\frac{\pi}{2})\Rightarrow$

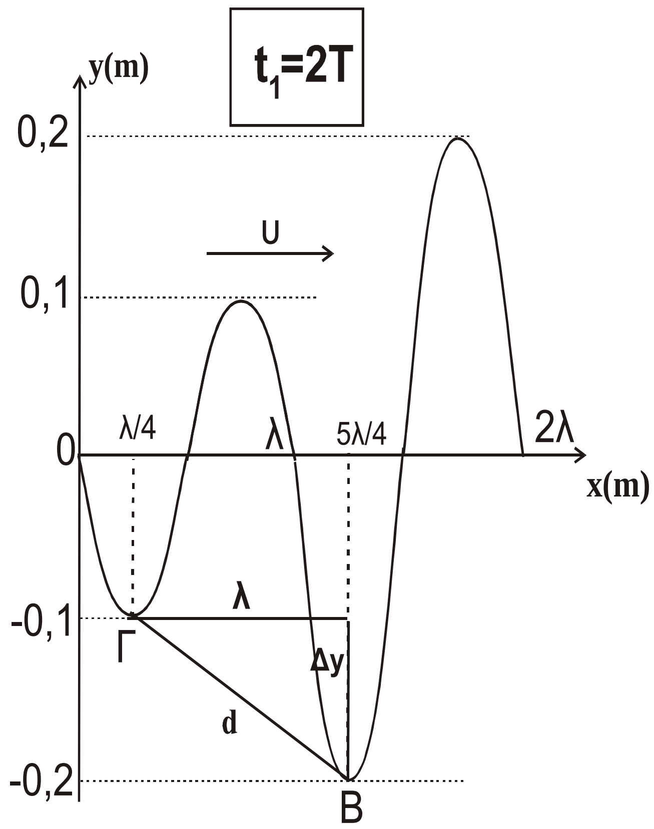
$y_\Gamma=-\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\omega t$ και παρόμοια για την ταλάντωση του Β έχουμε

$y_B=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{5}{4})=A\eta\mu(\omega t-\frac{5\pi}{2})\Rightarrow y_B=-A\sigma\upsilon\nu\omega t$.

Τότε είναι $\Delta y=y_B-y_\Gamma=-\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\omega t$.

Έτσι είναι $d=\sqrt{\Delta y^2+\lambda^2}\Rightarrow d=\sqrt{\frac{A^2}{4}\sigma\upsilon\nu^2\omega t+\lambda^2}$ ή $d=\sqrt{0,01\sigma\upsilon\nu^2 10\pi t+4}$

Τη χρονική στιγμή t=2T=0,4s είναι $d=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\lambda^2}=\sqrt{0,01+4}\approx 2m$.



ε) Τη χρονική t=0 και ενώ η πηγή ταλαντώνεται με εξίσωση y=A΄·ημ10πt το πλάτος της Α΄ αρχίζει να μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A΄=0,1\cdot e^{-2t}$, οπότε η εξίσωση του κύματος είναι $y=0,1\cdot e^{-2\cdot(t-\frac{x}{10})}\cdot\eta\mu 2\pi(5t-\frac{x}{2})$.

Τη χρονική στιγμή t=T=0,2s είναι y=A΄·ημ2π(1-$\frac{x}{2}$).

Για x=0 είναι y=0 και v>0
Για φ=0 είναι x=λ=2m

Ακόμη το σημείο N με x_N=3λ/4 ταλαντώνεται για χρόνο t=T/4=$\frac{1}{20}$ s και έχει πλάτος $A_N = 0{,}1\cdot e^{-0{,}1} = 0{,}09$m ή 9cm.

Ενώ το σημείο M με x_M=λ/4 ταλαντώνεται για χρόνο t=3T/4=$\frac{3}{20}$ s και έχει πλάτος $A_M = 0{,}1\cdot e^{-0{,}3} = 0{,}073$m ή 7,3cm.

Το στιγμιότυπο του κύματος είναι το παρακάτω: