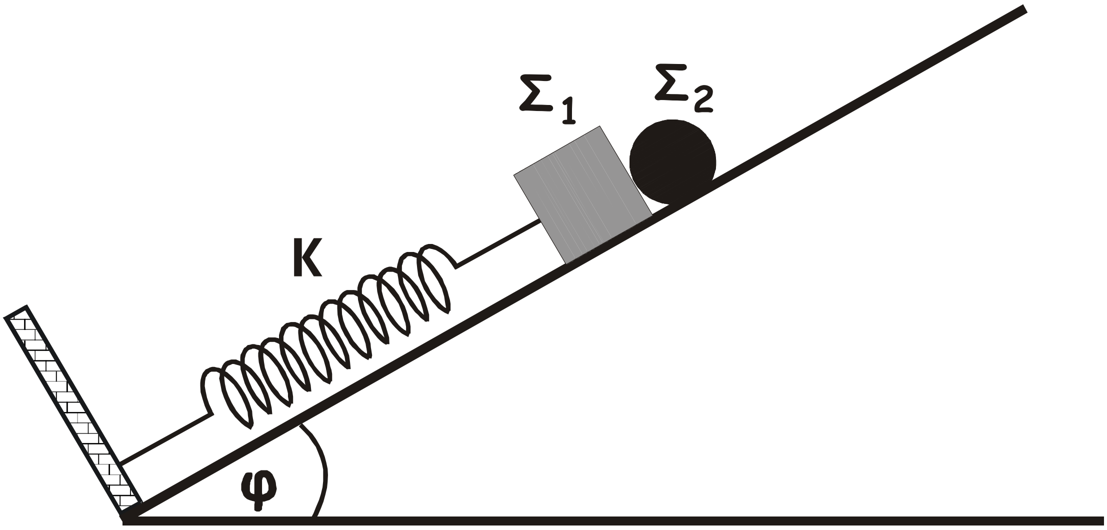
Ταλάντωση και «αποχωρισμός»

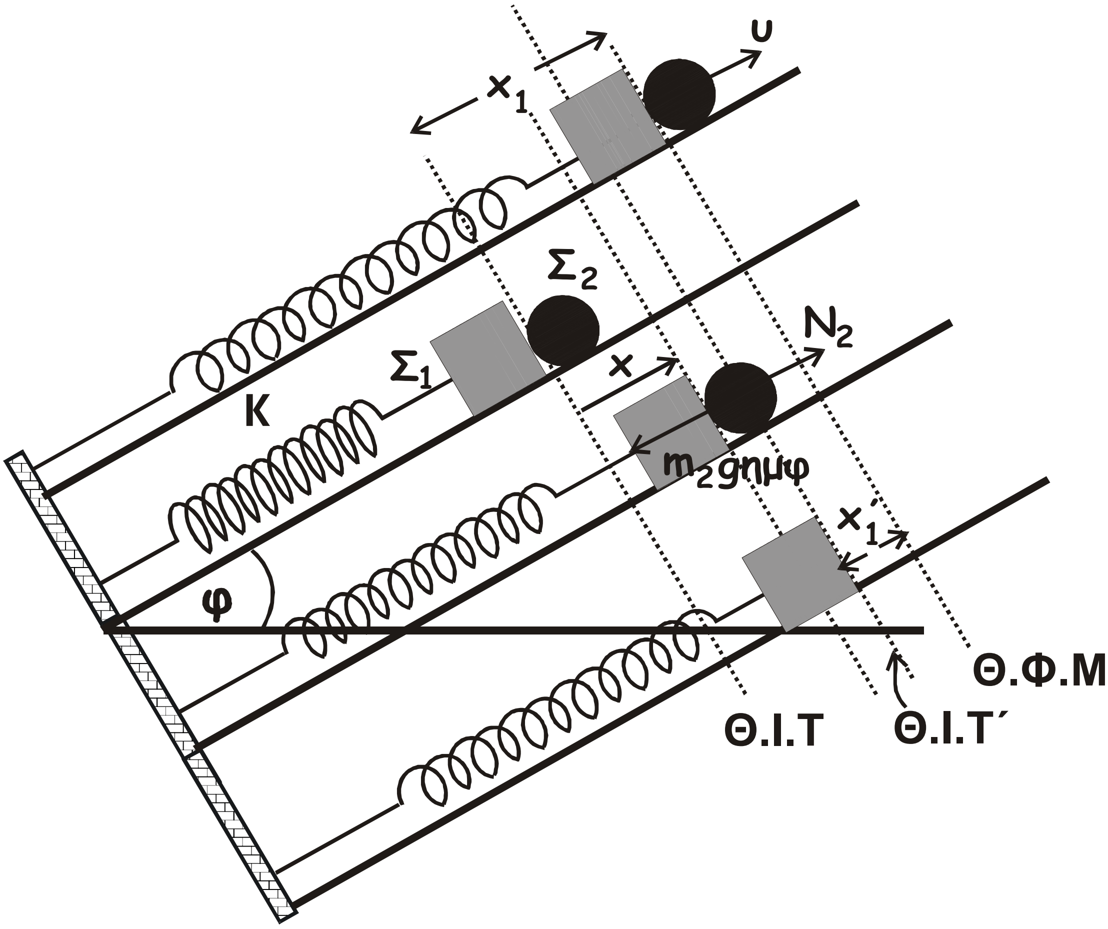
Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος με m_1=1Kg και m_2=3Kg αντίστοιχα, είναι τοποθετημένα σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^0$ και εφάπτονται μεταξύ τους. Το Σ_1 είναι δεμένο στην άκρη του ελατηρίου σταθεράς K=100N/m. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Μετακινούμε τα σώματα ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά A=40cm και στη συνέχεια τα αφήνουμε ελεύθερα. Να βρείτε:



α) Πως μεταβάλλεται με το χρόνο και μέχρι να αποχωριστούν τα Σ_1 και Σ_2, η δύναμη ανάμεσα στις δυο μάζες, αν για t=0 είναι x=0 και υ>0,
β) τη θέση στην οποία θα αποχωριστεί το Σ_2 από το Σ_1,
γ) την ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το Σ_1 αφού αποχωριστεί από το Σ_2,
δ) το κλάσμα της κινητικής ενέργειας του Σ_2, αμέσως μετά τον αποχωρισμό, προς την αρχική ενέργεια της ταλάντωσης των δυο σωμάτων,
ε) την απόσταση μεταξύ των δυο σωμάτων όταν το Σ_1 πραγματοποιήσει μια ταλάντωση μετά τον αποχωρισμό.
στ) Αν κολλήσουμε τα δυο σώματα, με μια κόλλα τότε ποια είναι η μέγιστη σταθερή ελκτική δύναμη που πρέπει να ασκεί η κόλλα στα δυο σώματα ώστε κάποτε να αποχωριστούν;
Δίνεται π=3,14, π^2=10, $\sqrt{3}$=1,7 και g=10m/s^2 .

Συνοπτική λύση:

α) Για τη Θ.Ι.Τ του συστήματος των δυο μαζών έχουμε ,



$\Sigma F=0 \Rightarrow (m_1+m_2)\cdot g\cdot ημφ = K\cdot x_1 \Rightarrow x_1=\dfrac{(m_1+m_2)gημφ}{K}=\dfrac{20}{100}\Rightarrow x_1=0{,}2m.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Ισχύει $x_1=\dfrac{(m_1+m_2)gημφ}{K} \Rightarrow x_1=\dfrac{(m_1+m_2)gημφ}{(m_1+m_2)\omega^2} \Rightarrow x_1=\dfrac{gημφ}{\omega^2}$.
Ακόμη έχουμε $K=(m_1+m_2)\cdot\omega^2$ και για τη σταθερά ταλάντωσης του Σ_2 έχουμε, $D_2=m_2\cdot\omega^2$, οπότε προκύπτει $D_2=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\cdot K \Rightarrow D_2=75N/m$. Παρόμοια έχουμε και $D_1=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\cdot K \Rightarrow D_1=25N/m$. Προκύπτει ότι $D_1+D_2=K$.

Τότε για το Σ_2 και για μια τυχαία θέση που απέχει έστω x πάνω από τη Θ.Ι.Τ ισχύει: $N_2-m_2\cdot g\cdot ημφ = -D_2\cdot x \Rightarrow N_2=m_2\cdot g\cdot ημφ - D_2\cdot x \Rightarrow N_2=15-75x$. Ισχύει $x=A\cdot ημ(\omega t+\varphi_0)$ με $\varphi_0=0$, και $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m_1+m_2}}=5$ rad/s οπότε έχουμε, $x=0{,}4\cdot ημ5t$. Τελικά προκύπτει, $N_2=15-75x \Rightarrow N_2=15-30\cdot ημ5t$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2: Παρόμοια για το Σ_1 και για μια θέση πάνω από τη Θ.Ι.Τ είναι,
$-m_1\cdot g\cdot ημφ - N_2΄ + F_{ελ} = -D_1\cdot x \Rightarrow -m_1\cdot g\cdot ημφ - N_2΄ + K\cdot(x_1-x) = -D_1\cdot x \Rightarrow$
$\Rightarrow -5-N_2΄+100\cdot(0{,}2-x) = -25\cdot x \Rightarrow -5-N_2΄+20-100\cdot x = -25\cdot x \Rightarrow N_2΄=15-75x.$

β) Η αποκόλληση μπορεί να γίνει μόνο πάνω από τη Θ.Ι.Τ. Έτσι για τον αποχωρισμό και για πάνω από τη Θ.Ι.Τ ισχύει $N_2=0 \Rightarrow 15-75x=0 \Rightarrow x=\frac{15}{75}=\frac{1}{5}=0{,}2m=x_1$.

Βέβαια όταν $x=x_1=0{,}2m$ για πρώτη φορά οπότε και τα σώματα αποχωρίζονται ισχύει $0{,}2=0{,}4\cdot ημ5t \Rightarrow t=\frac{\pi}{30}$ s. Άρα η σχέση $N_2=15-30\cdot ημ5t$ ισχύει για $0 \le t < \frac{\pi}{30}$ s.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3: Γενικά έχουμε $N_2 = m_2\cdot g\cdot ημφ - D_2\cdot x=0 \Rightarrow x=\frac{m_2 gημφ}{m_2\omega^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{gημφ}{\omega^2}=x_1$. Δηλαδή η αποκόλληση γίνεται στη Θ.Φ.Μ του ελατηρίου και σε απόσταση από τη Θ.Ι.Τ, $x=x_1=\frac{gημφ}{\omega^2}$.

γ) Τη στιγμή του αποχωρισμού τα δυο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουν κοινή ταχύτητα $υ=\omega\cdot\sqrt{A^2-x_1^2} \Rightarrow υ=\sqrt{25\cdot(16\cdot 10^{-2}-4\cdot 10^{-2})} \Rightarrow υ=\sqrt{3}$ m/s.

Για την καινούργια Θ.Ι.Τ΄ του σώματος $Σ_1$ ισχύει $ΣF=0 \Rightarrow m_1\cdot g\cdot ημφ=K\cdot x_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1'=\frac{m_1 gημφ}{K}=\frac{5}{100} \Rightarrow x_1'=0{,}05m$. Τότε από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος $Σ_1$ και για τη στιγμή του αποχωρισμού έχουμε,

$E_T'=\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1'^2+\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot υ^2=\frac{1}{2}K\cdot A'^2 \Rightarrow E_T'=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 25\cdot 10^{-4}+\frac{1}{2}\cdot 3 \Rightarrow E_T'=\frac{1}{8}+\frac{12}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_T'=\frac{13}{8}$ J ή $E_T'=1{,}625$ J. (Τότε είναι και $A'=\frac{\sqrt{3{,}25}}{10} \approx 18cm$).

Βέβαια για την αρχική ενέργεια ταλάντωσης E_T του συστήματος των δυο σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουμε $E_T=\frac{1}{2}K\cdot A^2 \Rightarrow E_T=\frac{1}{2}100\cdot 16\cdot 10^{-2} \Rightarrow E_T=8$ J. Ακόμη η κινητική ενέργεια του $Σ_2$ τη στιγμή του αποχωρισμού είναι $K_2=\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot υ^2=4{,}5$ J, οπότε έχουμε μια διαφορά $ΔΕ=8-1{,}625-4{,}5=1{,}875$ J!!!!!!!!! den peirazei.

Για την αρχική ισορροπία των $Σ_1$ και $Σ_2$ και ως προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (που είναι και η θέση του αποχωρισμού των δυο μαζών), το σύστημα των $Σ_1$ και $Σ_2$ έχει μια βαρυτική δυναμική ενέργεια,
$U_β=-(m_1+m_2)\cdot g\cdot ημφ\cdot x_1= -20\cdot 0{,}2= -4$ J . Μετά των αποχωρισμό των $Σ_1$ και $Σ_2$ η $Σ_1$ στη θέση ισορροπίας της και ως προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου έχει
$U'_β=-m_1\cdot g\cdot ημφ\cdot x_1'= -5\cdot 0{,}05= -0{,}25$ J άρα το σύστημα «κέρδισε» μια βαρυτική δυναμική ενέργεια $ΔU_β= 3{,}75$ J$=\frac{30}{8}$ J. Το ελατήριο στην αρχική Θ.Ι.Τ έχει μια ελαστική δυναμική ενέργεια $U_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2 \Rightarrow U_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0{,}04 \Rightarrow U_{ελ}=2$ J. Μετά την απομάκρυνση του $Σ_2$ το ελατήριο στην καινούργια Θ.Ι.Τ΄ έχει μια ελαστική δυναμική

ενέργεια $U'_{ελ}= \frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^{\prime 2} \Rightarrow U'_{ελ}= \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0{,}25\cdot 10^{-2} \Rightarrow U'_{ελ}= 0{,}125\ J=\frac{1}{8}\ J$. Άρα το σύστημα «έχασε» μια ελαστική δυναμική ενέργεια $\Delta U_{ελ}= 0{,}125 - 2= -1{,}875 J= -\frac{15}{8}\ J$.

Άρα τελικά το $Σ_1$ «κέρδισε» μια ενέργεια $\Delta E= \Delta U_β+ \Delta U_{ελ} \Rightarrow \Delta E=\frac{30}{8}-\frac{15}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta E=\frac{15}{8}=1{,}875\ J$.

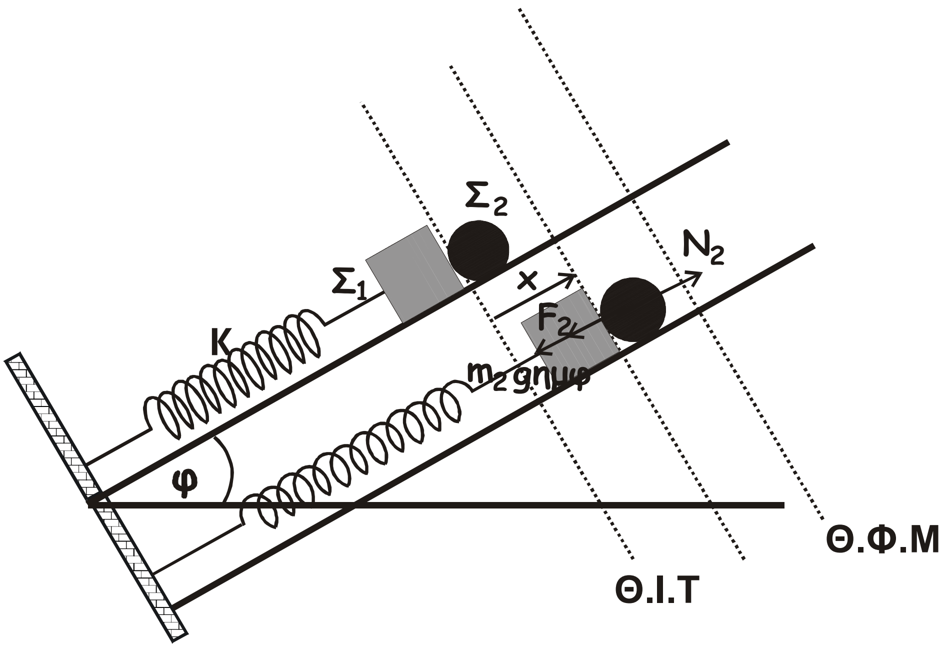
δ) Είπαμε ότι $K_2=\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot υ^2=4{,}5\ J$ και $E_T=8\ J$. Άρα $α= \frac{K_2}{E_T} = \frac{9}{16}=0{,}5625$.

ε) Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ είναι $T'=2π\sqrt{\frac{m_1}{K}}=0{,}2π\ s$.

Σε χρόνο μιας περιόδου μετά τον αποχωρισμό, το $Σ_1$ θα ξαναέρθει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το $Σ_2$ θα έχει διανύσει απόσταση $x_2=υ\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot ημφ\cdot t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=υ\cdot T'-\frac{1}{2}\cdot g\cdot ημφ\cdot T'^2 \Rightarrow x_2=\sqrt{3}\cdot 0{,}2π-2{,}5\cdot(0{,}2π)^2 \Rightarrow x_2=1{,}0676-1 \Rightarrow x_2=0{,}0676\ m$ ή $x_2=6{,}76\ cm$.

στ) Έστω ότι η κόλλα ασκεί στο $Σ_2$ μια σταθερή δύναμη F_2, τότε για την ταλάντωση του $Σ_2$ και για μια τυχαία θέση που απέχει έστω x πάνω από τη Θ.Ι.Τ έχουμε,



$N_2-F_2-m_2\cdot g\cdot ημφ=-D_2\cdot x \overset{N_2=0}{\Rightarrow} -F_2 -m_2\cdot g\cdot ημφ=-D_2\cdot x \Rightarrow x= \frac{F_2+m_2 gημφ}{D_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x= \frac{F_2+15}{75}$. Όμως $x \le 0{,}4 \Rightarrow \frac{F_2+15}{75} \le 0{,}4 \Rightarrow F_2+15\le 30 \Rightarrow F_2\le 15\ N$. Άρα $F_{max}=15N$.