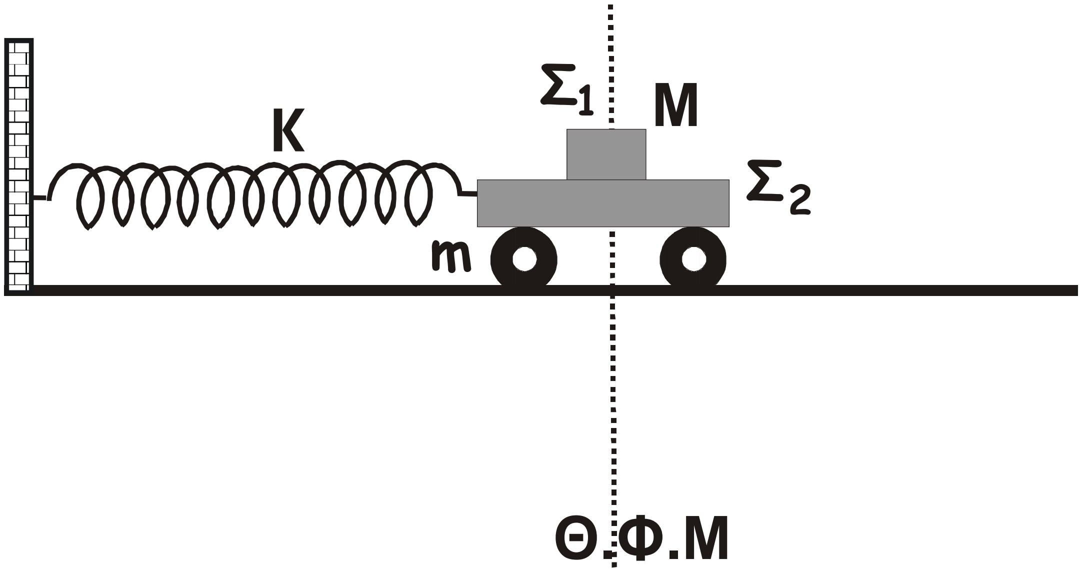
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ-ΚΥΛΙΣΗ- ΟΛΙΣΘΗΣΗ

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος αρχικά ισορροπούν.
Το Σ_1 βρίσκεται πάνω στο Σ_2. Το επίπεδο επαφής των δυο σωμάτων είναι οριζόντιο και ο συντελεστής τριβής μεταξύ τους είναι μ=0,5. Το Σ_2 βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ακόμη το Σ_2 αποτελείται από τέσσερις τροχούς μάζας m=1Kg και ακτίνας r ο καθένας και είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς K=800N/m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η συνολική μάζα του Σ_2 θεωρούμε ότι είναι όση και η μάζα των τεσσάρων τροχών του. Κάποια στιγμή και ενώ το σύστημα των δυο σωμάτων ισορροπεί, το απομακρύνουμε κατά $\Delta\ell$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Θεωρούμε ότι ο κάθε τροχός του Σ_2 κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

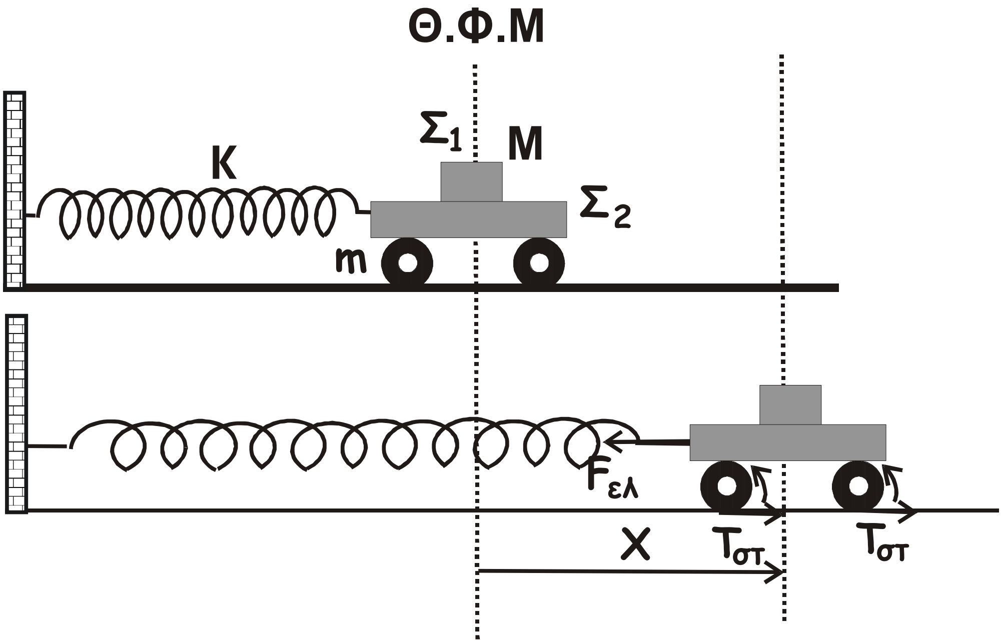


α) Να αποδείξετε ότι για το σύστημα των δυο μαζών έχουμε α.α.τ.
β) Αν θέλουμε τα δυο σώματα να ταλαντώνονται χωρίς να παρατηρείται ολίσθηση μεταξύ τους τότε ποιο είναι το μεγαλύτερο πλάτος της ταλάντωσης;
γ) Για το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα να γράψετε την εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος, αν για t=0 το σύστημα των Σ_1 και Σ_2 βρίσκεται στη θέση x=+A/2 από τη θέση ισορροπίας του και κινείται με αρνητική ταχύτητα.
δ) Αν η ακτίνα του κάθε τροχού είναι r=2cm, τότε πως μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κάθε τροχού;
ε) Να γράψετε την εξίσωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο t και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.
Δίνεται $g=10m/s^2$ και ότι η ροπή αδράνειας του κάθε τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2$.

Συνοπτική Λύση:

α) Για το σύστημα των στερεών Σ_1 και Σ_2 ισχύει:
$(\Sigma_1+\Sigma_2)$:· Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F=m_{ολ}\cdot\alpha \Rightarrow F_{ελ}-4\cdot T_{στ}=(M+4m)\cdot\alpha$ (1)
Όπου $T_{στ}$ είναι η στατική τριβή ανάμεσα στον κάθε τροχό του Σ_2 και του οριζόντιου επιπέδου.
Για τη στροφική κίνηση του κάθε τροχού ισχύει:
Στροφική κίνηση (m) : $T_{στ}\cdot r=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2.\alpha_{γων}$. Για κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει $\alpha=\alpha_{γων}\cdot r$
ή $\alpha_{γων}=\frac{\alpha}{r}$ οπότε έχουμε $T_{στ}\cdot r=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2.\frac{\alpha}{r}\Rightarrow T_{στ}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\alpha$ (2) ή $4T_{στ}=2\cdot m\cdot\alpha$ (3)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) $\wedge$ (3) προκύπτει $F_{ελ}=(M+6m)\cdot\alpha$ (4).
Με διαίρεση κατά μέλη των (2) $\wedge$ (4) προκύπτει $\frac{T_{στ}}{F_{ελ}}=\frac{m}{2(M+6m)}\Rightarrow$

$\Rightarrow T_{στ}=\frac{m}{2(M+6m)}F_{ελ}$. (5)



Σε μια τυχαία απομάκρυνση x από τη Θ.Ι.Τ (που εδώ ταυτίζεται με τη Θ.Φ.Μ του ελατηρίου) ισχύει $\Sigma F=4T_{στ}-F_{ελ}\Rightarrow \Sigma F=4\frac{m}{2(M+6m)}F_{ελ}-F_{ελ}\Rightarrow \Sigma F=-\frac{M+4m}{M+6m}F_{ελ}\Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma F=-\frac{M+4m}{M+6m}\cdot K\cdot x\Rightarrow \Sigma F=-D\cdot x$ με $D=\frac{M+4m}{M+6m}\cdot K=600N/m$. Άρα έχουμε α.α.τ με $D=600N/m$.

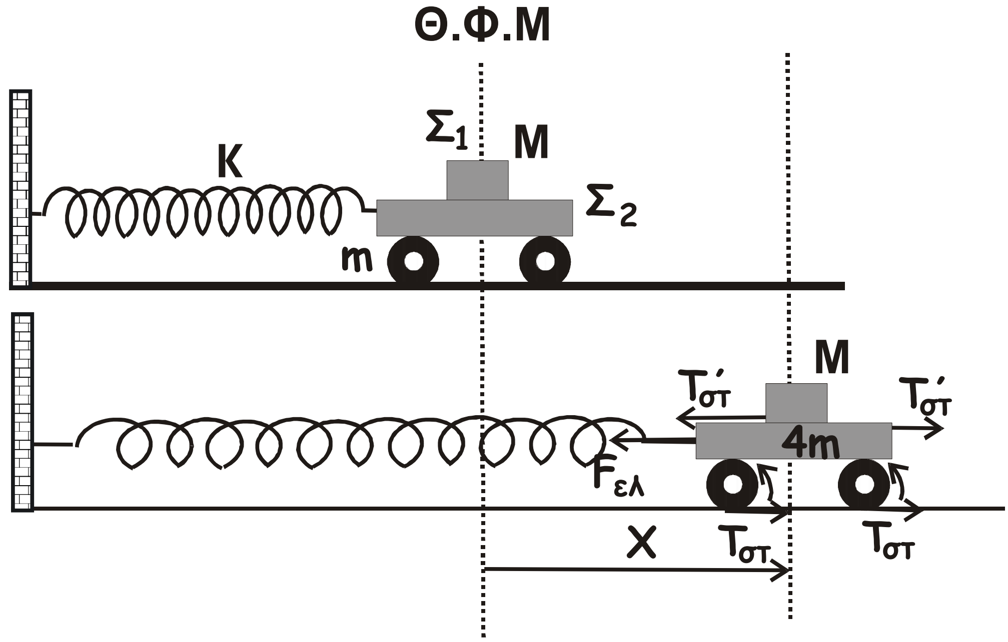
β) Για να μην ολισθαίνει το Σ_1 πάνω στο Σ_2 θα πρέπει το μέτρο της στατικής τριβής να είναι $T_{στ}\le\mu\cdot N\Rightarrow T_{στ}\le\mu\cdot M\cdot g$.
Για τη σταθερά ταλάντωσης D_1 του Σ_1 ισχύει $D_1=M\cdot\omega^2$ ενώ για τη συνολική σταθερά ταλάντωσης του συστήματος έχουμε $D=m_{ολ}\cdot\omega^2$ με $m_{ολ}=M+4m=6Kg$. Με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει, $D_1=\frac{M}{m_{ολ}}\cdot D=200N/m$.

Οπότε για την ταλάντωση του Σ_1 έχουμε $|T_{στ}|=D_1\cdot A\le\mu\cdot M\cdot g\Rightarrow A\le\frac{\mu\cdot g}{D}m_{ολ}$ ή

$A\le\frac{5}{600}\cdot 6\Rightarrow A\le 5cm$, οπότε $A_{max}=5cm$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Για τη μεταφορική κίνηση μόνο του $Σ_2$ ισχύει: $ΣF=4m\cdot α \Rightarrow$



$\Rightarrow F_{ελ}-4\cdot T_{στ}-T'_{στ}=4m\cdot α$ (6) όπου $T'_{στ}$ είναι η στατική τριβή ανάμεσα στα $Σ_1$ και $Σ_2$.

Ακόμη για το $Σ_1$ ισχύει: $T'_{στ}=M\cdot α$ (7). Με πρόσθεση κατά μέλη των (6)∧(7) προκύπτει $F_{ελ}-4\cdot T_{στ}=(M+4m)\cdot α$, που είναι η σχέση (1). Ακόμη από τη σχέση (4) έχουμε (4)$\Rightarrow α=\frac{F_{ελ}}{M+6m} \Rightarrow α=-\frac{K}{M+6m}\cdot x$. Οπότε (7)$\Rightarrow T'_{στ}=-\frac{M}{M+6m}\cdot K\cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow T'_{στ}=-200\cdot x$. Στην ίδια σχέση μπορούμε να καταλήξουμε και από τη σχέση (6). Άρα πράγματι στη μάζα Μ ασκείται η στατική τριβή $T'_{στ}$ που μεταβάλλεται με το χρόνο αρμονικά.

γ) Η εξίσωση της α.α.τ του συσσωματώματος ($Σ_1+Σ_2$) είναι $x=A_{max}\cdot ημ(ω_T\cdot t+φ_0)$. Για για t=0 είναι x=2,5cm δεξιά της Θ.Φ.Μ του ελατηρίου η οποία Θ.Φ.Μ είναι και η Θ.Ι του $Σ_1+Σ_2$ και υ>0. Τότε είναι $ημφ_0=\frac{1}{2}=ημ\frac{π}{6} \Rightarrow φ_0=2κπ+\frac{π}{6}$ ή $φ_0=2κπ+\frac{5π}{6}$ με $κ \in Z^+$.

Για υ<0 δεχόμαστε τη γενική λύση $φ_0=2κπ+\frac{5π}{6}$ η οποία για κ=0 μας δίνει

$φ_0=\frac{5π}{6}$ rad. ($0 \le φ_0 < 2π$ rad).

Ακόμη $ω_T=\sqrt{\frac{D}{m_{ολ}}} \Rightarrow ω_T=\sqrt{100}=10$ rad/s. Τελικά έχουμε

$x=5\cdot 10^{-2}\cdot ημ(10\cdot t+\frac{5π}{6})$ (S.I).

δ) Η ταχύτητα της α.α.τ είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega_T\cdot t+\varphi_0)$, με $\upsilon_{max} = \omega_T\cdot A \Rightarrow \upsilon_{max} = 0{,}5 m/s$.
Άρα έχουμε, $\upsilon = 0{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu(10\cdot t+\frac{5\pi}{6})$ (S.I).

Όμως η υ είναι η γραμμική ταχύτητα των τροχών κάθε χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $\upsilon=\omega\cdot r \Rightarrow \omega=\frac{\upsilon}{r} \Rightarrow \omega=25\cdot\sigma\upsilon\nu(10\cdot t+\frac{5\pi}{6})$ (S.I).

ε) Για την κινητική ενέργεια του Σ_1 έχουμε $K_1=\frac{1}{2}M\cdot\upsilon^2$. Για την κινητική ενέργεια του Σ_2 έχουμε $K_2=\frac{1}{2}4m\cdot\upsilon^2+4\cdot\frac{1}{2}I\cdot\omega^2$ με $I=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2$ και $\omega=\frac{\upsilon}{r}$. Άρα έχουμε,
$K_2=\frac{1}{2}4m\cdot\upsilon^2+4\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2\cdot\omega^2 \Rightarrow K_2=2\cdot m\cdot\upsilon^2+m\cdot\upsilon^2 \Rightarrow K_2=3\cdot m\cdot\upsilon^2$. Έτσι η συνολική κινητική ενέργεια των $\Sigma_1+\Sigma_2$, είναι $K=K_1+K_2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}M\cdot\upsilon^2+3\cdot m\cdot\upsilon^2 \Rightarrow K=4\cdot\upsilon^2$ με $\upsilon = 0{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu(10\cdot t+\frac{5\pi}{6})$ (S.I).

Οπότε έχουμε $K=4\cdot 0{,}25\cdot\sigma\upsilon\nu^2(10\cdot t+\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow$
$\Rightarrow K=\sigma\upsilon\nu^2(10\cdot t+\frac{5\pi}{6})$.