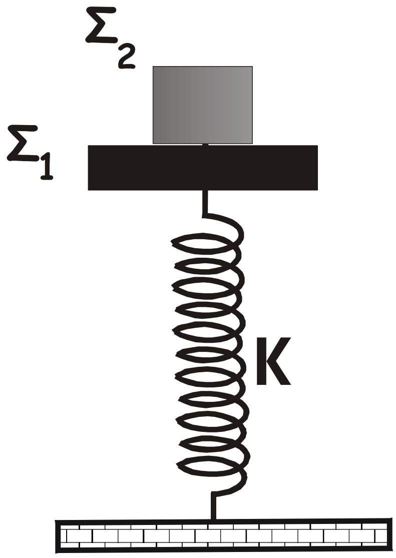
Ταλάντωση και «κόλλα»



Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ του σχήματος έχουν μάζες M=3Kg και m=1Kg αντίστοιχα. Κολλάμε τα δυο σώματα, με μια κόλλα που ασκεί σταθερή ελκτική δύναμη F=20N. Το $Σ_1$ είναι δεμένο στην άκρη του ελατηρίου σταθεράς K=400N/m. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Μετακινούμε τα σώματα ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά A=ΔL=0,5m και στη συνέχεια τα αφήνουμε ελεύθερα. Να βρείτε:

α) Το ελάχιστο πλάτος ταλάντωσης A_{min}, για το οποίο θα αποχωριστεί το $Σ_2$ από το $Σ_1$. Σε ποια θέση αποχωρίζονται τα δυο σώματα; Πόσο είναι το έργο της δύναμης F, μέχρι τη στιγμή του αποχωρισμού;

β) πως μεταβάλλεται με το χρόνο και μέχρι να αποχωριστούν τα $Σ_1$ και $Σ_2$, η κάθετη αντίδραση ανάμεσα στις δυο μάζες, αν για t=0 είναι x=0 και υ>0,

γ) πόση είναι η κάθετη αντίδραση ανάμεσα στις δυο επιφάνειες για x= -A/2;

δ) πως μεταβάλλεται με το χρόνο η επιτάχυνση του $Σ_2$;

ε) την κινητική ενέργεια του $Σ_2$ αμέσως μετά τον αποχωρισμό καθώς και την ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το $Σ_1$ αφού αποχωριστεί από το $Σ_2$,

στ) αν θέλουμε τα σώματα να αποχωριστούν στο μισό της απομάκρυνσης που βρήκαμε στο ερώτημα (α) τότε τι τιμή πρέπει να έχει η σταθερά K, του ελατηρίου;

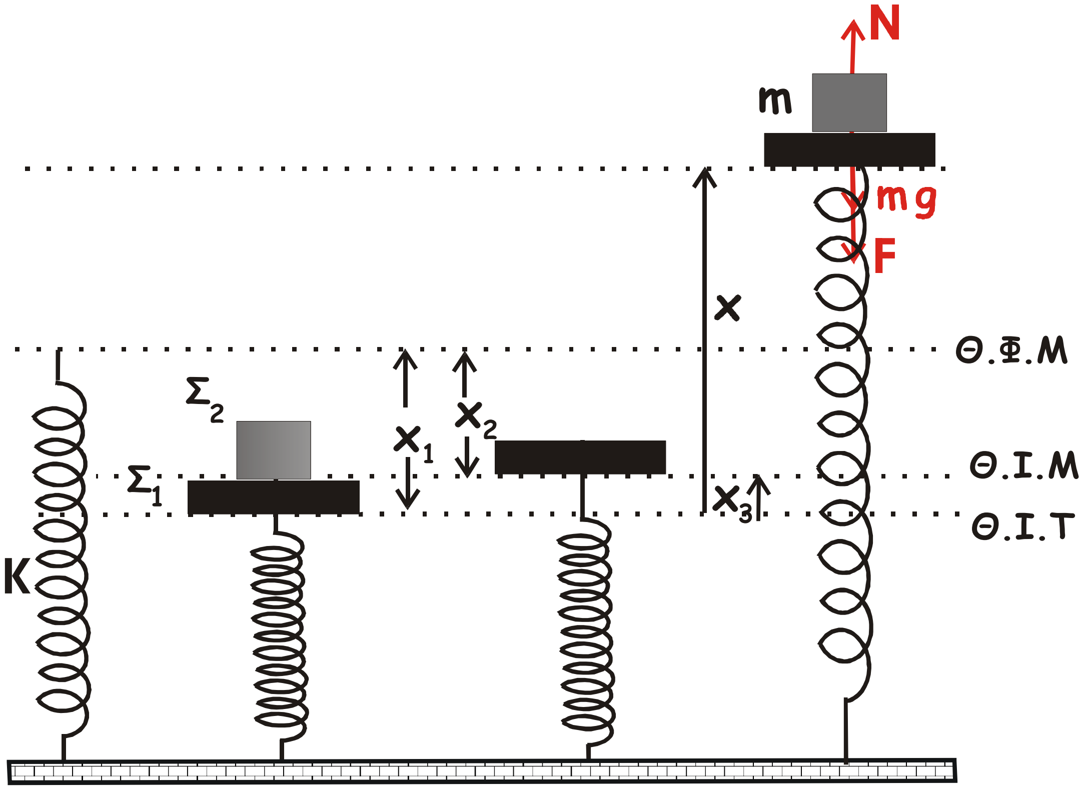
Αν ω και ω΄ είναι οι γωνιακές συχνότητες των $Σ_1$+$Σ_2$ στο ερώτημα (α) και στο ερώτημα (στ), να βρείτε το λόγο $\frac{ω'}{ω}$.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

α) Για τη Θ.Ι.Τ του συστήματος των δυο μαζών έχουμε ,

$\Sigma F=0 \Rightarrow (m+M)\cdot g = K\cdot x_1 \Rightarrow x_1=\frac{(m+M)g}{K}=\frac{40}{400} \Rightarrow x_1=0,1m.$



Για τη σταθερά ταλάντωσης του Σ_2 ισχύει, $D_2=m_2\cdot\omega^2$, ακόμη ισχύει $K=(m_1+m_2)\cdot\omega^2$.

Τελικά προκύπτει $D=\frac{m}{m+M}\cdot K \Rightarrow D=100N/m.$

Τότε για το Σ_2 και για μια τυχαία θέση που απέχει έστω x πάνω από τη Θ.Ι.Τ ισχύει:

$\Sigma F=-Dx \Rightarrow N-F-m\cdot g= - D\cdot x \Rightarrow N =F+m\cdot g - D\cdot x \Rightarrow N=30-100x.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Για το Σ_1 έχουμε:

$D'=\frac{M}{m+M}\cdot K \Rightarrow D'=300N/m.$ Προκύπτει ότι $D+D'=K$

Παρόμοια για το Σ_1 και για μια θέση πάνω από τη Θ.Ι.Τ είναι,

$F_{\varepsilon\lambda} +F-M\cdot g- N' = - D_1\cdot x \Rightarrow K\cdot(x_1-x) +F-M\cdot g- N' = - D'\cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow 400\cdot(0,1-x) +20-30- N' = - 300\cdot x \Rightarrow 30- 400\cdot x- N' = - 300\cdot x \Rightarrow N'=N=30-100x.$

Η ελκτική δύναμη της κόλας είναι σταθερή και ίση με F=20N. Οι δυο μάζες αποχωρίζονται μόλις η κάθετη αντίδραση ανάμεσα στις δύο μάζες γίνει N=0.

Άρα $N=30-100x=0 \Rightarrow x=0,3m$ δηλαδή τα σώματα αποχωρίζονται στη θέση x=+0,3m δηλαδή πάνω από τη Θ.Ι.Τ.

Για μια τυχαία θέση έστω x, κάτω από τη τη Θ.Ι.Τ ισχύει: $\Sigma F=-Dx \Rightarrow$

$\Rightarrow F+m\cdot g-N=-D\cdot x \Rightarrow N=F+m\cdot g+D\cdot x \Rightarrow N\neq 0$ οπότε τα σώματα δεν μπορούν να αποχωριστούν κάτω από τη Θ.Ι.Τ.

Έτσι λοιπόν το ελάχιστο πλάτος ταλάντωσης για να αποχωριστούν τα δυο σώματα είναι $A_{min}=0{,}3m$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που το πλάτος ταλάντωσης είναι $A=\Delta L=0{,}5m$ μόλις τα Σ_1 και Σ_2 βρεθούν στη θέση $x=+0{,}3m$ θα αποχωριστούν και θα συνεχίσει να ταλαντώνεται μόνο το Σ_1.

Η δύναμη F που ασκεί η κόλλα στα δυο σώματα είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος οπότε και το συνολικό της έργο είναι σε κάθε περίπτωση μηδέν. $W_F=0$.

β) Ισχύει $x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ με $\varphi_0=0$, και $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m+M}}=10$ rad/s οπότε έχουμε,

$x=0{,}5\cdot\eta\mu 10t$. Τελικά προκύπτει, $N=30-100x \Rightarrow N=30-50\cdot\eta\mu 10t$.

γ) Ισχύει $N=30-100x$. Για $x=-0{,}25m$ έχουμε $N=30+100\cdot 0{,}25 \Rightarrow N=55N$.

δ) Για την επιτάχυνση των $\Sigma_1+\Sigma_2$ και μέχρι τη στιγμή του αποχωρισμού τους ισχύει $\alpha=-\omega^2\cdot x \Rightarrow \alpha=-100x \Rightarrow \alpha=-50\cdot\eta\mu 10t$. Μόλις $x=0{,}3m$ τότε τα σώματα αποχωρίζονται και η επιτάχυνση του Σ_2 γίνεται πλέον κατά μέτρο ίση με $\alpha_2=10m/s^2$ ενώ πραγματοποιεί πλέον κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. Το Σ_1 μετά τον αποχωρισμό συνεχίζει να επιβραδύνεται με επιτάχυνση $\alpha=-\omega^2\cdot x'$, όπου x' είναι η καινούργια εξίσωση α.α.τ του.

ε) Τη στιγμή του αποχωρισμού τα δυο σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν κοινή ταχύτητα
$\upsilon=\omega\cdot\sqrt{A^2-x_1^2} \Rightarrow \upsilon=10\cdot\sqrt{25\cdot 10^{-2}-9\cdot 10^{-2}} \Rightarrow \upsilon=4m/s$.

Για την καινούργια Θ.Ι.Τ΄ του σώματος Σ_1 ισχύει $\Sigma F=0 \Rightarrow M\cdot g=K\cdot x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_2=\dfrac{M\cdot g}{K}=\dfrac{3}{40}$ m. Τότε από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ_1 και για τη στιγμή του αποχωρισμού έχουμε,
$E_T'=\dfrac{1}{2}\cdot K\cdot(x-x_3)^2+\dfrac{1}{2}\cdot M\cdot\upsilon^2=\dfrac{1}{2}K\cdot A'^2$ όπου $x_3=x_1-x_2=0{,}1-\dfrac{3}{40} \Rightarrow x_3=\dfrac{1}{40}$ m,
είναι η κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω της θέσης ισορροπίας της μάζας M (Σ_1), σε σχέση με την αρχική θέση ισορροπίας των $\Sigma_1+\Sigma_2$ και $x-x_3=0{,}3-\dfrac{1}{40}=\dfrac{11}{40}$ m, είναι η απομάκρυνση του Σ_1 τη στιγμή του αποχωρισμού από την καινούργια θέση ισορροπίας του. Άρα έχουμε
$E_T'=\dfrac{1}{2}\cdot 400\cdot(\dfrac{11}{40})^2+\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 16 \Rightarrow E_T'=\dfrac{121}{8}+24 \Rightarrow E_T'=\dfrac{313}{8}=39{,}125J$.

Τότε είναι και $A'=\dfrac{\sqrt{313}}{40}\approx 44cm$).

Βέβαια για την αρχική ενέργεια ταλάντωσης E_T του συστήματος των δυο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 έχουμε $E_T=\dfrac{1}{2}K\cdot A^2 \Rightarrow E_T=\dfrac{1}{2}400\cdot 25\cdot 10^{-2} \Rightarrow E_T=50$ J. Ακόμη η κινητική ενέργεια του $Σ_2$ τη στιγμή του αποχωρισμού είναι $K_2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot υ^2=8$ J, οπότε έχουμε μια διαφορά ΔΕ=50-39,125-8=2,875 J!!!!!!!!!.

Για την αρχική ισορροπία των $Σ_1$ και $Σ_2$ και ως προς τη θέση του αποχωρισμού των δυο μαζών το σύστημα των $Σ_1$ και $Σ_2$ έχει μια βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_β=-(m+M)\cdot g\cdot x=-40\cdot 0{,}3=-12$ J . Μετά των αποχωρισμό των $Σ_1$ και $Σ_2$, η $Σ_1$ στη θέση ισορροπίας της και ως προς τη θέση του αποχωρισμού των δυο μαζών έχει $U'_β=-M\cdot g\cdot(x-x_3)=-30\cdot\frac{11}{40}=-\frac{33}{4}$ J άρα το σύστημα «κέρδισε» μια βαρυτική δυναμική ενέργεια $ΔU_β=-\frac{33}{4}+12=\frac{15}{4}=3{,}75$J. Το ελατήριο στην αρχική Θ.Ι.Τ έχει μια ελαστική δυναμική ενέργεια $U_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2 \Rightarrow U_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot 400\cdot 0{,}01 \Rightarrow U_{ελ}=2$ J. Μετά την απομάκρυνση του $Σ_2$ το ελατήριο στην καινούργια Θ.Ι.Τ΄ έχει μια ελαστική δυναμική ενέργεια $U'_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_2^2 \Rightarrow U'_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot 400\cdot(\frac{3}{40})^2 \Rightarrow U'_{ελ}=\frac{9}{8}=1{,}125$ J.
Άρα το σύστημα «έχασε» μια ελαστική δυναμική ενέργεια $ΔU_{ελ}=1{,}125-2=-0{,}875$J= $=-\frac{7}{8}$ J.

Άρα τελικά το $Σ_1$ «κέρδισε» μια ενέργεια $ΔE=ΔU_β+ΔU_{ελ} \Rightarrow ΔE=\frac{30}{8}-\frac{7}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow ΔE=\frac{23}{8}=2{,}875$ J.

στ) Για $x=\frac{0{,}3}{2}=0{,}15$m και για πάνω από τη Θ.Ι.Τ των $Σ_1+Σ_2$ έχουμε

$$N=F+m\cdot g-D''\cdot x \overset{N=0}{\Rightarrow} D''=\frac{F+mg}{x}=\frac{30}{0{,}15}=200\text{N/m}.$$

Όμως ισχύει $D''=\frac{m}{m+M}\cdot K' \Rightarrow K'=\frac{m+M}{m}D'' \Rightarrow K'=800\text{N/m}=2K$.

Ακόμη ισχύει $ω=\sqrt{\frac{K}{m+M}}$ και $ω'=\sqrt{\frac{K'}{m+M}}$,άρα έχουμε $\frac{ω'}{ω}=\sqrt{\frac{K'}{K}}=\sqrt{2}$.