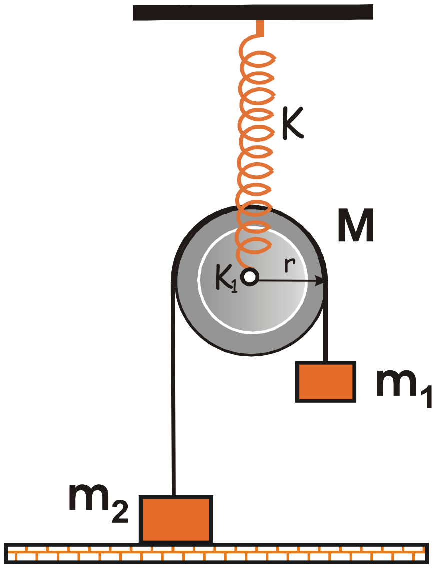
Μιχαήλ Π. Μιχαήλ
Φυσικός

ΤΡΟΧΑΛΙΑ

Η τροχαλία του σχήματος, έχει μάζα M=10Kg και ακτίνα r=20cm. Τα σώματα έχουν μάζες m_1=5Kg και m_2=15Kg και το σχοινί είναι αβαρές και μη εκτατό.
Η τροχαλία είναι δεμένη σε αβαρές ελατήριο σταθεράς K=1560N,
α) Για ποια επιμήκυνση του ελατηρίου η m_2 ξεκολλά από το έδαφος;
β) Αν το ελατήριο είναι αρχικά επιμηκυμένο κατά x=50cm, τότε τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο να βρείτε τις επιταχύνσεις α_1 και α_2 των δυο μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα, καθώς και τις τάσεις των νημάτων.
Δίνεται για την τροχαλία $I_{cm}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot r^2$ και $g=10m/s^2$.



Λύση:

α) Για να ξεκολλήσει η m_2 από το έδαφος θα πρέπει $\alpha=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r$. Τότε έχουμε

$T_2-T_1=\frac{1}{2}$ M·α (1), ακόμη $T_1=m_1g+2m_1.\alpha$ (2) και $T_2=m_2g$ (N=0) (3).

Άρα $m_2g- m_1g-2m_1.\alpha=\frac{1}{2}$ $M\cdot\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{20}{3}$ m/s^2. Τότε έχουμε $T_1=\frac{350}{3}$N και T_2=150N.

Για τη μεταφορική κίνηση της τροχαλίας ισχύει:

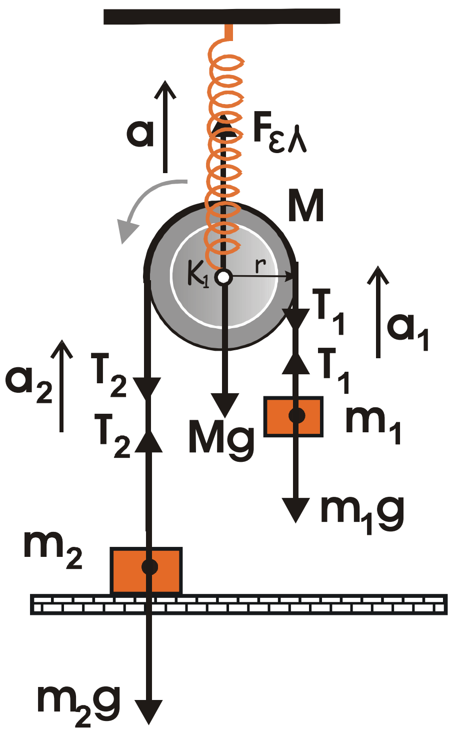
$\Sigma F=M\alpha\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}-T_1-T_2-Mg=M\alpha\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=\frac{1300}{3}$=433,3N και $F_{\varepsilon\lambda}=K\ x_{max}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_{max}=\frac{433,3}{1560}$=0,277m ή 27,7cm.

β) Για τη μάζα M και για τη μεταφορική της κίνηση ισχύει:
$\Sigma F=M\alpha\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}-T_1-T_2-Mg=M\alpha$ (1)
Για τη στροφική κίνηση έχουμε:
$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow(T_2-T_1)r=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$
$\Rightarrow(T_2-T_1)r=\frac{1}{2}Mr^2\ \alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\ T_2-T_1=\frac{1}{2}M\cdot r\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2).

Για την m_1 που πραγματοποιεί μόνο μεταφορική κίνηση έχουμε $\Sigma F=m_1\alpha_1\Rightarrow T_1-m_1g=m_1\alpha_1\Rightarrow$
$\Rightarrow T_1=m_1g+m_1\alpha_1\Rightarrow T_1=m_1g+m_1(\alpha+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r)$ (3)

Επειδή $x=0,5m>x_{max}$ η m_2 θεωρούμε ότι χάνει την επαφή της με το έδαφος και εκείνη τη στιγμή για τη μεταφορική κίνηση της μάζας m_2 έχουμε
$\Sigma F= m_2\alpha_2\Rightarrow T_2-m_2g = m_2\alpha_2\Rightarrow T_2=m_2g+m_2\alpha_2\Rightarrow$
$\Rightarrow T_2= m_2g+m_2(\alpha-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r)$ (4).



Από τη σχέση (2) και με τη βοήθεια των (3) και (4) έχουμε: $T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M \cdot r \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_2 g + m_2(\alpha - \alpha_{γων} \cdot r) - m_1 g - m_1(\alpha + \alpha_{γων} \cdot r) = \frac{1}{2} M \cdot r \cdot \alpha_{γων}$. (5)

Ακόμη προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$F_{ελ} - Mg - 2T_1 = M\alpha + \frac{1}{2} M \cdot r \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{ελ} - Mg - 2m_1 g - 2m_1(\alpha + \alpha_{γων} \cdot r) = M\alpha + \frac{1}{2} M \cdot r \cdot \alpha_{γων}$ (6).

Για το μέτρο της $F_{ελ}$ έχουμε $F_{ελ} = Kx \Rightarrow F_{ελ} = 780N$.
Τότε από τη σχέση (5) με αντικατάσταση προκύπτει $\alpha_{γων} = 20 + 2\alpha$ (7) και από την (6) παρόμοια έχουμε $3\ \alpha_{γων} = 580 - 20\alpha$ (8).
Λύνοντας το σύστημα των (7) και (8) έχουμε $\alpha = 20 m/s^2$ και $\alpha_{γων} = 60\ rad/s^2$.
Τελικά προκύπτει $\alpha_1 = \alpha + \alpha_{γων} \cdot r = 32 m/s^2$ και $\alpha_2 = \alpha - \alpha_{γων} \cdot r = 8 m/s^2$.
Για τις τάσεις των νημάτων έχουμε $T_1 = m_1 g + m_1 \alpha_1 \Rightarrow T_1 = 210N$ και
$T_2 = m_2 g + m_2 \alpha_2 \Rightarrow T_2 = 270N$.