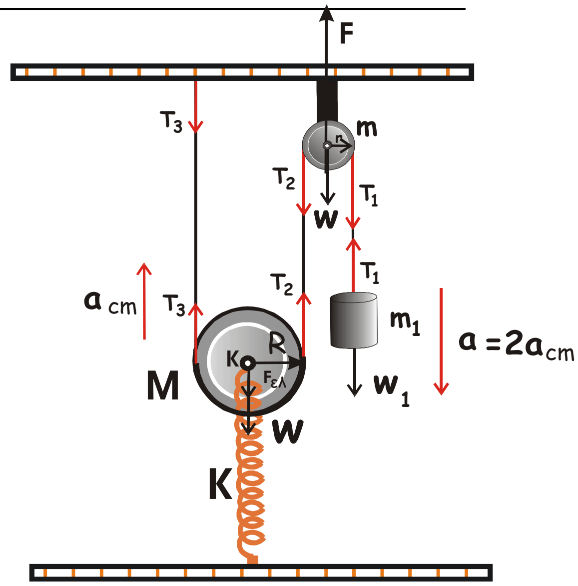
Μιχαήλ Π. Μιχαήλ
Φυσικός

Στη διπλανή διάταξη η τροχαλία κέντρου Κ έχει ακτίνα R και μάζα M=4Kg ενώ η μικρή τροχαλία έχει μάζα m=1Kg και ακτίνα r.
Η m_1=3Kg ενώ το ελατήριο έχει σταθερά K=400N/m. Τραβάμε τη μάζα m προς τα κάτω κατά d=10cm και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη.
Να βρείτε πως μεταβάλλεται με το χρόνο η δύναμη που F που ασκείται από την οριζόντια οροφή στη μικρή τροχαλία. Για την τροχαλία ισχύει: $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$ ακόμη $g=10m/s^2$.



Λύση:

m_1: $m_1g=T_1'=T_2'=T_3'$.
$T_2'+T_3'=Mg+Kx_1 \Rightarrow 2m_1g=Mg+Kx_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=0{,}05m$. Όπου x_1 είναι η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου όταν το σύστημα ισορροπεί.

Σε μια τυχαία θέση (έστω πιο κάτω κατά x από την αρχική θέση ισορροπίας της m_1 και x΄ πιο πάνω από τη θέση ισορροπίας της τροχαλίας M).
Για τη μάζα m_1: $T_1-m_1g=2m_1\alpha_{cm}$(1)
m: $(T_2-T_1)r=\frac{1}{2}mr^2\frac{\alpha}{r} \Rightarrow T_2-T_1=m\alpha_{cm}$ (2)
M: $Mg+K(x_1+x')-T_2-T_3=M\,\alpha_{cm}$ (3) και ισχύει x΄=x/2, όπου x΄ είναι η επιπλέον επιμήκυνση του ελατηρίου.
$(T_3-T_2)R=\frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_3-T_2=\frac{1}{2}M\,\alpha_{cm}$.(4)
(1) ∧ (2) $\Rightarrow T_2=30+7\,\alpha_{cm}$. (5)
(3) ∧ (4) $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $\alpha_{cm}=20x'$ ή $\alpha_{cm}=20\frac{x}{2}=10x$.
m_1: $\Sigma F=m_1g-T_1=-2m_1\alpha_{cm}=-60x$
M: $\Sigma F=T_2+T_3-Mg-K(x_1+x')=-M\,\alpha_{cm}=-4\cdot 20x'=-80x'$.
Τότε για την εξίσωση ταλάντωσης της m_1 ισχύει : $x=0{,}1ημ(\sqrt{20}\,t+\frac{\pi}{2})$ και για τη μάζα M ισχύει : $x'=0{,}05ημ(\sqrt{20}\,t+\frac{\pi}{2})$ (S.I).

Ισχύει (1) $T_1=m_1g+2m_1\alpha_{cm} \Rightarrow T_1=30+6\cdot 20\frac{x}{2} \Rightarrow T_1=30+6ημ(\sqrt{20}\,t+\frac{\pi}{2})$ και

$T_2=T_1+m\alpha_{cm} \Rightarrow T_2=30+6\cdot 20\frac{x}{2}+20\frac{x}{2} \Rightarrow T_2=30+7ημ(\sqrt{20}\,t+\frac{\pi}{2})$.

$F=T_1+T_2+mg \Rightarrow F=70+13ημ(\sqrt{20}\,t+\frac{\pi}{2})$.