Στη διπλανή διάταξη η τροχαλία κέντρου Κ έχει ακτίνα R και μάζα M=4Kg ενώ η μικρή τροχαλία έχει μάζα m=1Kg και ακτίνα r. Αφήνουμε τη m_1=3Kg ελεύθερη να κινηθεί.

Να βρείτε:

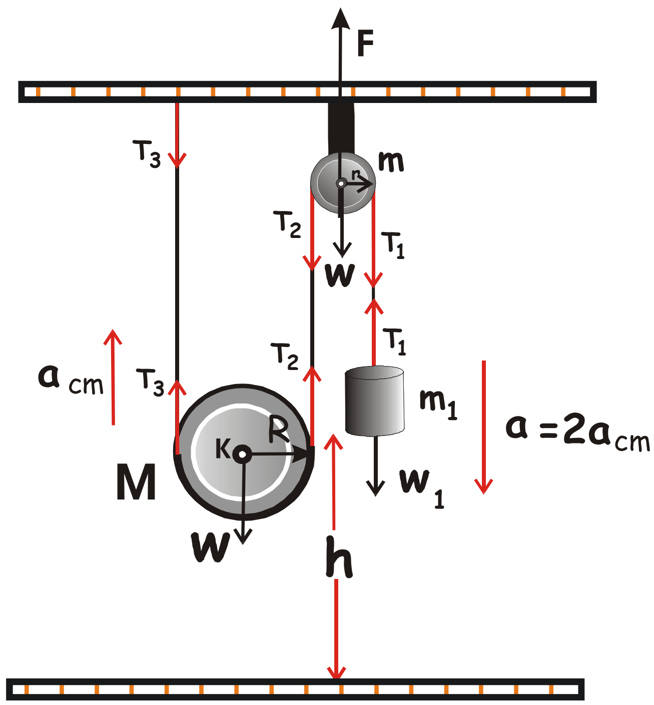
α) Την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί η μάζα m_1 και

β) τη συνολική δύναμη ΣF που ασκείται από την οριζόντια οροφή στο σύστημα των τροχαλιών,

γ) Να υπολογιστούν τα έργα των τάσεων T_1, T_2 T_3 που ασκούνται στις τροχαλίες αν η μάζα m_1 μετατοπιστεί προς τα κάτω κατά h=1m.

Για την τροχαλία ισχύει

$I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$ ακόμη $g=10m/s^2$.



Λύση:

α) Για τη μάζα m_1: $m_1g - T_1 = m_1\alpha = 2m_1\alpha_{cm}$(1)

m: $(T_1-T_2)r = \frac{1}{2}mr^2\frac{\alpha}{r} \Rightarrow T_1-T_2=\frac{1}{2}m\alpha \Rightarrow T_1-T_2= m\alpha_{cm}$ (2)

M: $T_2+T_3-Mg = M\cdot\alpha_{cm}$ (3) και

$(T_2-T_3)R=\frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_2-T_3=\frac{1}{2}M\,\alpha_{cm}$.(4)

(1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow m_1g - T_2 = m_1\alpha = 2m_1\alpha_{cm} + m\alpha_{cm}$ (5)

(3) $\wedge$ (4)$\Rightarrow 2T_2=\frac{3}{2}M\,\alpha_{cm}+Mg \Rightarrow T_2=\frac{3}{4}M\,\alpha_{cm}+\frac{1}{2}Mg$ (6)

(5) $\wedge$ (6)$\Rightarrow m_1g = (2m_1 + m + \frac{3}{4}M)\ \alpha_{cm}+\frac{1}{2}Mg \Rightarrow 30=10\cdot\alpha_{cm}+20 \Rightarrow \alpha_{cm}=1m/s^2$ και $\alpha=2m/s^2$.

β) (1)$\Rightarrow T_1= m_1g - 2m_1\alpha_{cm} \Rightarrow T_1=30-6=24N$

(2)$\Rightarrow T_2=T_1- m\alpha_{cm} \Rightarrow T_2= 24-1 \Rightarrow T_2=23N$,

(3)$\Rightarrow T_3=Mg + M\cdot\alpha_{cm}-T_2 \Rightarrow T_3=40+4-23 \Rightarrow T_3= 21N$. Τότε $F=T_1+T_2+mg \Rightarrow$ $F=24+23+10 \Rightarrow F=57N$. Τότε $ΣF=F'+T_3 \Rightarrow ΣF=57+21 \Rightarrow ΣF=78N$.

γ) Για την κινούμενη τροχαλία Μ ισχύει:

$W_{T2}= W_{μετ}+W_{στρ}= T_2\cdot\frac{h}{2}+T_2R\theta= T_2\cdot\frac{h}{2}+ T_2\cdot\frac{h}{2}=T_2h=23J$. Βέβαια αν υπολογίζαμε το έργο της T_2 στη μικρή τροχαλία m θα είχαμε: $W_{T2}=W_{στρ}= -T_2r\theta' = -T_2h =-23J$. Η θ΄=2θ όπου θ είναι η γωνία περιστροφής της κινητής τροχαλίας Μ και θ’ είναι η γωνία περιστροφής της μικρής τροχαλίας m.

$W_{T3}= W_{μετ}+W_{στρ}= T_3\cdot \frac{h}{2}-T_3Rθ= T_3\cdot\frac{h}{2}- T_3\cdot\frac{h}{2}= 0$. Δηλαδή η T_3 δεν παράγει κάποιο συνολικό έργο όπως ακριβώς γίνεται και με την αντίδρασή της που ασκείται στην οροφή και η οποία δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.

Για τη μικρή τροχαλία m ισχύει:
$W_{T1}=W_{στρ}= T_1rθ’= T_1h=24J$. Βέβαια αν υπολογίζαμε το έργο της T_1 στη μάζα m_1 έχουμε $W_{T1}= W_{μετ}= -T_1\cdot h= -24J$.

Άρα πράγματι επαληθεύεται ότι το συνολικό έργο των τάσεων σαν εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος είναι μηδέν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν υπολογίσουμε με το Θ.Μ.Κ.Ε την ταχύτητα της μάζας m_1 για μετατόπιση κατά h=1m θα έχουμε, Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{w1}-W_{T1}\Rightarrow\frac{1}{2}m_1υ_1^2= W_{w1}-W_{T1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{3}{2}υ_1^2=m_1gh-W_{T1}=30-24\Rightarrow υ_1=2m/s$, που είναι το ίδιο αποτέλεσμα που βρίσκουμε με τις εξισώσεις κίνησης $υ_1=αt$ και $h=\frac{1}{2}αt^2\Rightarrow t=1s$ και $υ_1=2m/s$.

Παρόμοια
αν υπολογίσουμε με το Θ.Μ.Κ.Ε την ταχύτητα της μάζας Μ για μετατόπιση κατά $x=\frac{h}{2}=0{,}5m$ θα έχουμε, Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{T2}+W_{T3}-Mg\frac{h}{2}\Rightarrow$

$\frac{1}{2}Mυ^2+\frac{1}{2}Iω^2= W_{T2}+W_{T3}-Mg\frac{h}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}Mυ^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2ω^2= W_{T2}+W_{T3}-Mg\frac{h}{2}\Rightarrow$

$\frac{1}{2}Mυ^2+\frac{1}{4}M υ^2= W_{T2}+W_{T3}-Mg\frac{h}{2}\Rightarrow\frac{3}{4}M υ^2= W_{T2}+W_{T3}-Mg\frac{h}{2}\Rightarrow 3 υ^2=23+0-20\Rightarrow$

$\Rightarrow υ=1m/s$ που είναι το ίδιο αποτέλεσμα που βρίσκουμε με τη σχέση
$υ=υ_{cm}=α_{cm}t=1m/s$.

Τέλος για την κινητική ενέργεια της τροχαλίας m έχουμε $K=\frac{1}{2}Iω'^2=\frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2ω'^2\Rightarrow$

$\Rightarrow K=\frac{1}{4}m υ_1^2= 1J$, κάτι που υπολογίζουμε και με το Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{T1}-W_{T2}\Rightarrow$

$\Rightarrow K=24-23=1J$.
Για το σύστημα των τροχαλιών έχουμε: Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{w1}+W_w\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}= m_1gh- Mg\frac{h}{2}\Rightarrow K_{τελ}=30-20=10J$.

Πράγματι: $K_{m1}=K=1J$, όπως βρήκαμε προηγουμένως , $K_M=\frac{1}{2}Mυ^2+\frac{1}{2}Iω^2=$

$=\frac{1}{2}Mυ^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2ω^2=\frac{3}{4}M υ^2=3J$ και $K_m=\frac{1}{2}m_1υ_1^2=6J$, οπότε $K_{τελ}=1+3+6=10J$.