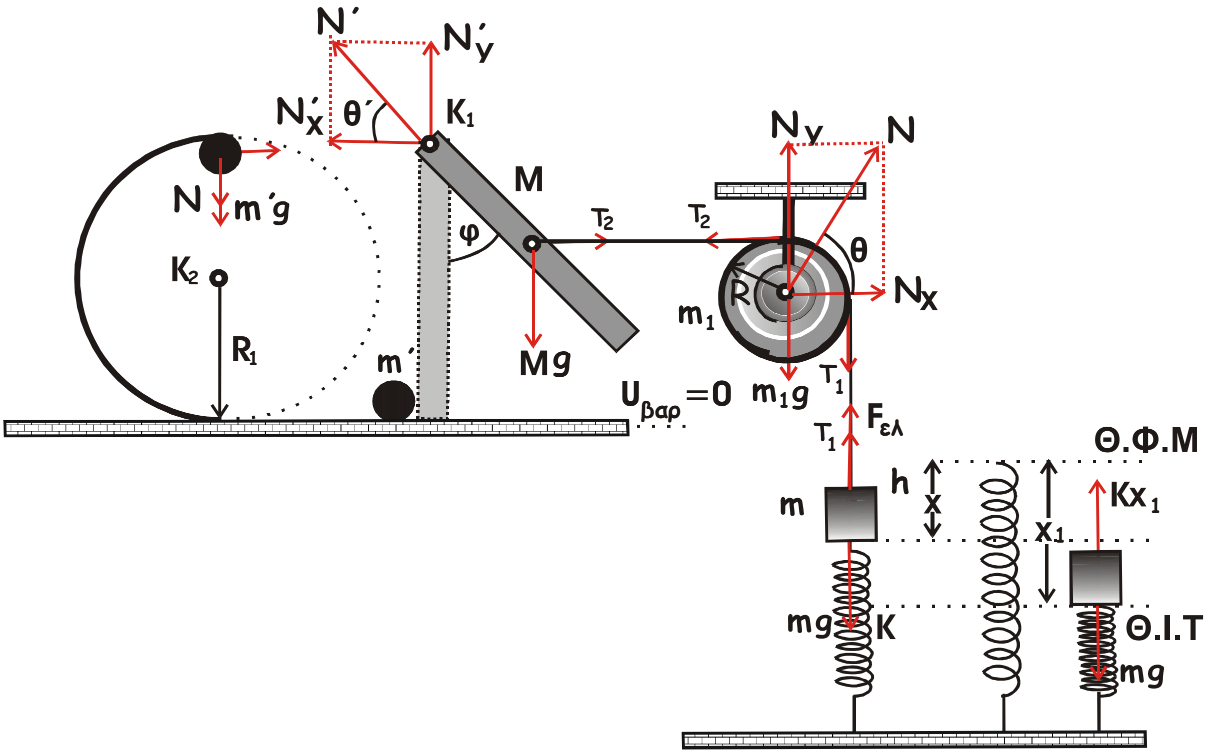
Τροχαλία_ελατήριο_ανακύκλωση

Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα m_1=0,2Kg και ακτίνα R. Στην περιφέρεια της τροχαλίας είναι τυλιγμένο γύρω της, αβαρές νήμα στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας m=0,8Kg. Το σώμα μάζας m είναι επίσης δεμένο στο κατακόρυφο ελατήριο του σχήματος σταθεράς K=80N/m. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο στο μέσο ράβδου μάζας M=0,6Kg και μήκους L=1m που αρχικά ισορροπεί σχηματίζοντας με την κατακόρυφο γωνία φ=45^0.
Το σύστημα αρχικά ισορροπεί.
α) Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου, για την αρχική ισορροπία του συστήματος,
β) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις N και N΄ που ασκούνται στην τροχαλία και στη ράβδο αντίστοιχα από τους άξονες περιστροφής
γ) Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει την τροχαλία με τη ράβδο τότε,



i) Να υπολογίσετε την αρχική επιτάχυνση της μάζας m και
ii) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μόλις αυτή γίνει κατακόρυφη,
δ) Μόλις η ράβδος γίνει κατακόρυφη το κατώτερο σημείο της συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σημειακή μάζα m΄=0,2Kg. Η m΄ τότε αρχίζει να ολισθαίνει και συναντάει κυκλική στεφάνη ακτίνας R_1. Ποια μπορεί να είναι η μέγιστη ακτίνα της στεφάνης, ώστε η m΄ να κάνει ασφαλή ανακύκλωση; Τριβές δεν υπάρχουν. Δίνεται για την τροχαλία $I=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot R^2$ και για τη ράβδο $I_\rho=\frac{1}{12}\cdot M\cdot L^2$ ακόμη $g=10m/s^2$ και $\sqrt{2}=1{,}4$.

Συνοπτική λύση:

α) Από τη συνθήκη ισορροπίας για τη ράβδο μάζας M ισχύει, $\Sigma\tau=0 \Rightarrow T_2\cdot\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=M\cdot g\cdot\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow T_2=M\cdot g=6N$.

Για την τροχαλία ισχύει, $T_1=T_2=6N$. Ακόμη για τη μάζα m έχουμε $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}+T_1=mg \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=2N \Rightarrow Kx=2 \Rightarrow x=2{,}5\cdot 10^{-2}m$.

β) Από τη συνθήκη ισορροπίας για τη μεταφορική κίνηση της τροχαλίας έχουμε, $\Sigma F_x=0 \Rightarrow N_x=T_2=6N$, ακόμη $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N_y=m_1 g+T_1 \Rightarrow N_y=8N$, άρα $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}=10N$ με $\varepsilon\varphi\theta=\frac{4}{3}$.

Για τη ράβδο έχουμε, $\Sigma F_x=0 \Rightarrow N'_x=T_2=6N$, ακόμη $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N'_y=M\cdot g \Rightarrow N'_y=6N$, άρα $N'=\sqrt{N_x'^2+N_y'^2}=6\cdot\sqrt{2}$ N με $\varepsilon\varphi\theta'=1 \Rightarrow \theta'=45^0$.

γi) Μόλις κόψουμε το νήμα για την τροχαλία έχουμε, $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1'\cdot R=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot R^2\cdot\frac{\alpha}{R} \Rightarrow T_1'=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\alpha$ (1), για τη μάζα m που είναι δεμένη στο ελατήριο ισχύει, $\Sigma F=m\cdot\alpha \Rightarrow m\cdot g-F_{\varepsilon\lambda}-T_1'=m\cdot\alpha$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $m\cdot g-K\cdot x=m\cdot\alpha+\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\alpha \Rightarrow 8-2=0{,}8\cdot\alpha+0{,}1\cdot\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{20}{3}\ m/s^2$.

ii) Α.Δ.Μ.Ε: $K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow M\cdot g\cdot(L-\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)=\frac{1}{2}\cdot I_\rho\cdot\omega^2+M\cdot g\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow M\cdot g\cdot(L-\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot M\cdot L^2\cdot\omega^2+M\cdot g\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow 6-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}2\cdot\omega^2+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}1\cdot\omega^2 \Rightarrow 3-2{,}1=0{,}1\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega^2=9 \Rightarrow \omega=3$ rad/s.

δ) Για την κρούση Α.Δ.Σ: $L_{\alpha\rho\chi}=L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow I_\rho\cdot\omega=I_\rho\cdot\omega'+m'\cdot\upsilon\cdot L \Rightarrow 3-\omega'=\upsilon$ (3)

Α.Δ.Μ.Ε: $K_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot I_\rho\cdot\omega^2=\frac{1}{2}\cdot I_\rho\cdot\omega'^2+\frac{1}{2}\cdot m'\cdot\upsilon^2 \Rightarrow (3-\omega')\cdot(3+\omega')=\upsilon^2$ (4), διαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (4) προκύπτει $3+\omega'=\upsilon$ (5). Από τις (3) $\wedge$ (5) προκύπτει $\omega'=0$ και $\upsilon=3m/s$.

Στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς ασκούνται στη σφαίρα το βάρος της και η κάθετη αντίδραση από το εσωτερικό της στεφάνης. Η συνισταμένη αυτών θα πρέπει να δίνει την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη $N+m'\cdot g=\frac{m'\upsilon'^2}{R_1} \Rightarrow N=\frac{m'\upsilon'^2}{R_1}-m'\cdot g$ με

$N\geq 0 \Rightarrow \frac{m'\upsilon'^2}{R_1}\geq m'\cdot g \Rightarrow \upsilon'^2\geq g\cdot R_1$. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τη μάζα m΄ παίρνουμε, $K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m'\cdot\upsilon^2=\frac{1}{2}\cdot m'\cdot\upsilon'^2+m'\cdot g\cdot 2R_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon'^2=\upsilon^2-4\cdot g\cdot R\geq g\cdot R_1 \Rightarrow \upsilon^2\geq 5\cdot g\cdot R_1 \Rightarrow 9\geq 50\cdot R_1 \Rightarrow R_1\leq 0{,}18m$. Άρα η μέγιστη ακτίνα της στεφάνης, ώστε η m΄ να κάνει ασφαλή ανακύκλωση είναι $R_{max}=0{,}18m$ ή 18cm.