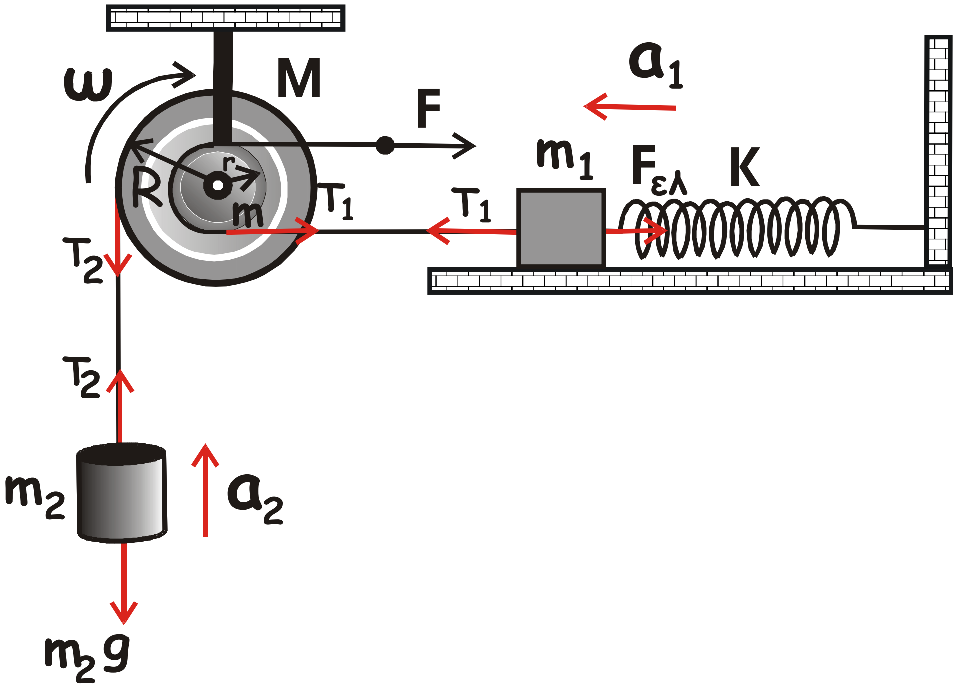
Τροχαλία και ελατήριο

Η τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δυο συγκολλημένους δίσκους με ακτίνες R=20cm και r=10cm που έχουν κοινό άξονα. Οι δίσκοι περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από τον κοινό τους άξονα και έχουν συνολική ροπή αδράνειας $I=4\cdot10^{-2}Kg\cdot m^2$. Τα αβαρή σχοινιά που είναι τυλιγμένα στους δίσκους, έχουν στα ελεύθερα άκρα τους δεμένα τα σώματα με μάζες m_1=4Kg και m_2=2Kg. Το σώμα μάζας m_1, είναι επίσης δεμένο σε οριζόντιο αβαρές ελατήριο K=100N/m και μπορεί να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Κάποια στιγμή εξασκούμε στο σύστημα την οριζόντια δύναμη F=80N που φαίνεται στο σχήμα. Τότε:



α) Για ποια επιμήκυνση του ελατηρίου η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τροχαλίας γίνεται μέγιστη;
β)i) Πόση είναι τότε η κινητική ενέργεια του κάθε σώματος;
ii) Ποιος είναι τότε ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος των μαζών;
Αν εκείνη τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τροχαλίας γίνεται μέγιστη κοπεί το νήμα που συνδέει τη μάζα m_1 με την τροχαλία, τότε
γ)i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση α_2 της μάζας m_2 καθώς και η τάση του νήματος που συνδέει την m_2 με την τροχαλία
ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος τροχαλία – m_2;
δ)i) Ποια είναι η ενέργεια ταλάντωσης της μάζας m_1 και
ii) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της m_1 καθώς αυτή ταλαντώνεται; Δίνεται $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

α) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τροχαλίας γίνεται μέγιστη όταν $\Sigma\tau=0$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$. Τότε, $\Sigma\tau=0 \Rightarrow F\cdot r - T_1\cdot r - T_2\cdot R=0$ (1)
Για τη μάζα m_2 ισχύει, $T_2 - m_2\cdot g = m_2\cdot \alpha_2$ (2) με $\alpha_2=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$. Όμως $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0 \Rightarrow \alpha_2=0$.
Προκύπτει λοιπόν $T_2 - m_2\cdot g=0 \Rightarrow T_2=m_2\cdot g \Rightarrow T_2=20N$.
(1)$\Rightarrow T_1=40N$.
Για τη μάζα m_1 ισχύει γενικά $\Sigma F=m_1\cdot\alpha_1 \Rightarrow T_1-F_{\varepsilon\lambda}= m_1\cdot\alpha_1$ με $\alpha_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r$. Για $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0 \Rightarrow \alpha_1=0$. Τότε έχουμε $T_1-F_{\varepsilon\lambda}=0 \Rightarrow T_1= F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow T_1=K\cdot x_1 \Rightarrow x_1=0,4m$.

βi) Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_F + W_w + W_{F\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}=F\cdot r\cdot\theta- m_2\cdot g\cdot x_2-\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2$ με $x_1=r\cdot\theta$ και $x_2=2\cdot r\cdot\theta$, άρα $x_2=2x_1$. Τότε, $K_{\tau\varepsilon\lambda}=F\cdot x_1- 2m_2\cdot g\cdot x_1-\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2 \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}=32-16-8 \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}=8$ J.
Όμως ισχύει, $K_1=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(\omega\cdot r)^2=2\cdot 10^{-2}\cdot\omega^2$
$K_2=\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2^2=\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot(\omega\cdot 2r)^2=4\cdot 10^{-2}\cdot\omega^2$ και $K_3=\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2=2\cdot 10^{-2}\cdot\omega^2$. Τότε έχουμε,
$K_1+K_2+K_3=K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 8\cdot 10^{-2}\cdot\omega^2=8 \Rightarrow \omega=10$rad/s και τελικά $K_1=2J$, $K_2=4J$ και $K_3=2J$.

ii) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος των μαζών εκείνη τη στιγμή έχουμε, $\frac{\Delta K}{\Delta t}=F\cdot r\cdot\omega - m_2\cdot g\cdot\upsilon_2 - K\cdot x_1\cdot\upsilon_1$, όπου $\upsilon_2=\omega\cdot R=2m/s$ και $\upsilon_1=\omega\cdot r=1m/s$. Τελικά $\frac{\Delta K}{\Delta t}=80-40-40 \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=0$ J/s.

γi) Μόλις κοπεί το νήμα για την τροχαλία ισχύει, $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F\cdot r-T_2'\cdot 2r= I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$
$\Rightarrow T_2'=40-\alpha_2$, ακόμη για τη μάζα m_2 ισχύει, $\Sigma F=m_2\cdot\alpha_2 \Rightarrow T_2'-m_2\cdot g= m_2\cdot\alpha_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 40-\alpha_2-20=2\cdot\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=\frac{20}{3}$ m/s^2 και $T_2'=\frac{100}{3}$N.
ii) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος τροχαλία – m_2 τη στιγμή που κόβεται το νήμα έχουμε, $\frac{\Delta K}{\Delta t}=F\cdot r\cdot\omega-m_2\cdot g\cdot\upsilon_2=80-40 \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=40$ J/s.

δi) Τη στιγμή που κόβεται το νήμα η m_1, απέχει από τη θέση ισορροπίας της που ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου απόσταση $x_1=0,4m$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_1=\omega\cdot r=1m/s$. Για την ενέργεια ταλάντωσης της μάζας m_1 θα έχουμε,
$E=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2+\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2 \Rightarrow E=\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0,16 \Rightarrow E=10J$,
ii) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της m_1 καθώς ταλαντώνεται έχουμε, $\frac{\Delta K}{\Delta t}=\Sigma F\cdot\upsilon= -K\cdot x\cdot\upsilon= -\frac{KA^2\omega_T}{2}\cdot\eta\mu(2\cdot\omega_T\cdot t)$ με $\omega_T=\sqrt{\frac{K}{m_1}}=5$rad/s.

Τότε είναι $(\frac{\Delta K}{\Delta t})_{max}=\frac{KA^2\omega_T}{2}=E\cdot\omega_T=10\cdot 5 \Rightarrow (\frac{\Delta K}{\Delta t})_{max}=50$ J/s.