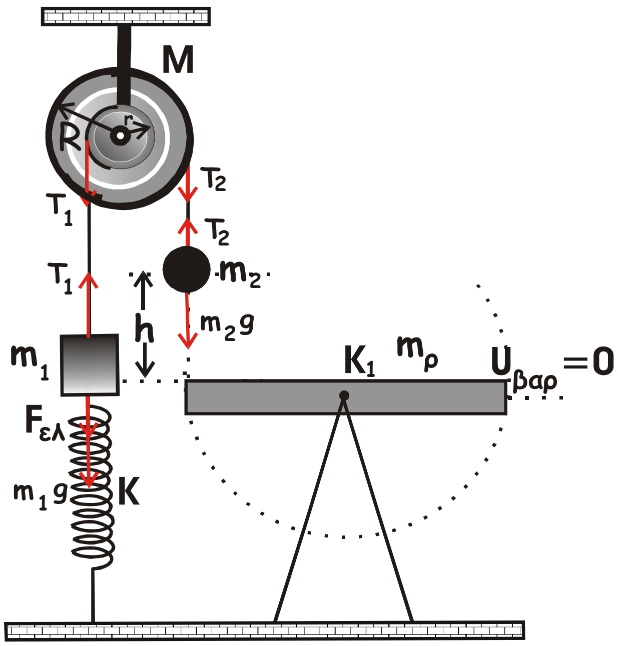
Τροχαλία_ελατήριο_ράβδος

Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα M=2Kg και ακτίνα R=20cm. Σε απόσταση $r=\frac{R}{2}$ από το κέντρο της υπάρχει ένα αυλάκι το οποίο είναι τυλιγμένο με αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας m_1=1Kg. Το σώμα μάζας m_1 είναι επίσης δεμένο στο κατακόρυφο ελατήριο του σχήματος σταθεράς K=100N/m. Στην περιφέρεια της τροχαλίας είναι επίσης τυλιγμένο γύρω της, αβαρές νήμα στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας m_2=1Kg.



Το σύστημα αρχικά ισορροπεί.

α) Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου, για την αρχική ισορροπία του συστήματος,

β) Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει τη m_1 με την τροχαλία, τότε:

i) Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης που πραγματοποιεί η m_1 και

ii) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της m_2,

γ) Η m_2 αφού διανύσει απόσταση h=0,4m σπάει το νήμα που τη συνδέει με την τροχαλία και συγκρούεται πλαστικά, χτυπώντας στο άκρο οριζόντιας ράβδου. Η ράβδος έχει μάζα $m_ρ$=3 Kg, μήκος L=1m. Ακόμη στηρίζεται στο κέντρο της K_1, σε τριγωνική βάση ενώ μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές. Τότε,

i) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση όταν το σύστημα ράβδος – m_2, έχει περιστραφεί κατά 180^0 και

ii) Να υπολογιστεί η γωνία στροφής για την οποία το σύστημα ράβδος – m_2 ηρεμεί στιγμιαία.

Δίνεται για την τροχαλία $I=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$ και για τη ράβδο $I_ρ=\frac{1}{12}\cdot m_ρ\cdot L^2$ και ακόμη $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

α) $T_2=m_2\cdot g=10N$.

$T_2\cdot R=T_1\cdot\frac{R}{2}\Rightarrow T_1=2\cdot T_2\Rightarrow T_1=20N$

$T_1=F_{ελ}+m_1\cdot g\Rightarrow T_1=K\cdot x+m_1\cdot g\Rightarrow x=0,1m$

β) i) Για τη θέση ισορροπίας της m_1 ισχύει $\Sigma F=0 \Rightarrow m_1\cdot g=K\cdot x_1 \Rightarrow x_1=0,1m$, άρα $A=x+x_1=0,2m$. Ισχύει $K=m_1\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega=10rad/s$. Ακόμη για $t=0$ είναι $x=+A$ άρα $\varphi_0=\frac{\pi}{2}rad$, έτσι προκύπτει $x=A\cdot\eta\mu(\omega\cdot t+\varphi_0) \Rightarrow x=0,2\cdot\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})$ (S.I).

ii) Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της m_2 θα έχουμε,

m_2: $m_2\cdot g-T_2'=m_2\cdot\alpha$ (1)

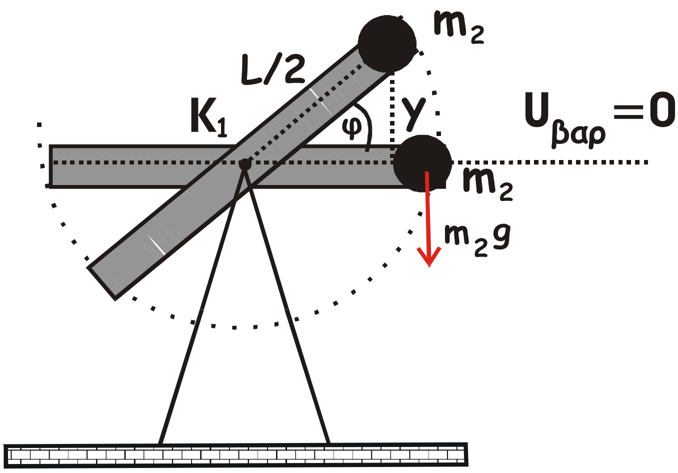
M: $T_2'\cdot R=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_2'\cdot R=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot\frac{\alpha}{R} \Rightarrow T_2'=\frac{1}{2}\cdot M\cdot\alpha$ (2), τότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $m_2\cdot g=m_2\cdot\alpha+\frac{1}{2}\cdot M\cdot\alpha \Rightarrow 10=2\cdot\alpha \Rightarrow \alpha=5m/s^2$.

γ) Ισχύει $h=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 \Rightarrow t=0,4s$ και $\upsilon=\alpha\cdot t \Rightarrow \upsilon=2m/s$, ακόμη από την αρχή διατήρησης της στροφορμής προκύπτει $m_2\cdot\upsilon\cdot\frac{L}{2}=I_{o\lambda}\cdot\omega_\kappa$ με $I_{o\lambda}=\frac{1}{12}\cdot m_\rho\cdot L^2+m_2(\frac{L}{2})^2=0,5Kg\cdot m^2$. Τότε θα έχουμε $m_2\cdot\upsilon\cdot\frac{L}{2}=I_{o\lambda}\cdot\omega_\kappa \Rightarrow 1=0,5\cdot\omega_\kappa \Rightarrow \omega_\kappa=2rad/s$.

i) Όταν το σύστημα ράβδος – m_2, θα έχει περιστραφεί κατά 180^0 ισχύει

$\Sigma\tau=I_{o\lambda}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -m_2\cdot g\cdot\frac{L}{2}=I_{o\lambda}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow -5=0,5\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=-10rad/s^2$



ii) Α.Δ.Μ.Ε:

$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot I_{o\lambda}\cdot\omega_\kappa^2=m_2\cdot g\cdot y \Rightarrow$

$\Rightarrow 1=10\cdot y \Rightarrow y=0,1m$.

Άρα είναι $\eta\mu\varphi=\frac{y}{L/2}=0,2$ ή $\varphi=11,5^0$, δηλαδή η συνολική γωνία περιστροφής του συστήματος ράβδος – m_2 μέχρι αυτό να ηρεμήσει στιγμιαία είναι $\varphi_{o\lambda}=180+\varphi=191,5^0$.