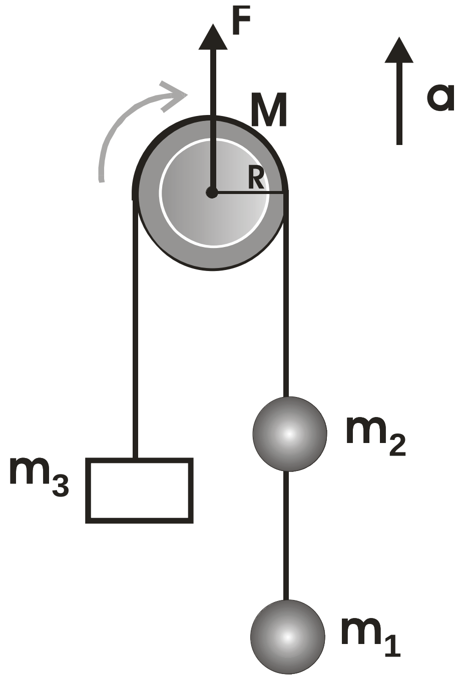
ΤΡΟΧΑΛΙΑ ΚΑΙ … ΜΑΖΕΣ

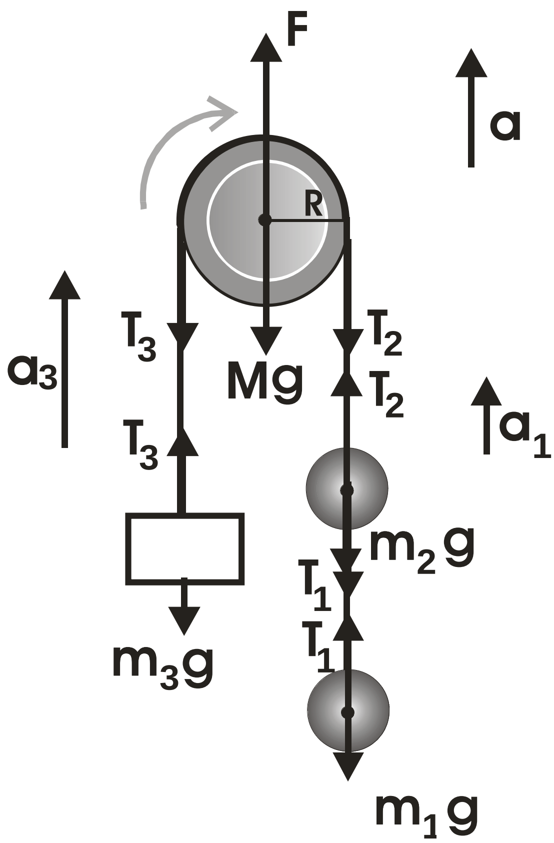
Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα M=6Kg και ακτίνα R=20cm και επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με δύναμη F=420N. Η τροχαλία μπορεί να στέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της. Γύρω από την τροχαλία, είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί, στα άκρα του οποίου είναι δεμένα σώματα με μάζες, m_1=4Kg, m_2=2Kg και m_3=1Kg. Τότε:



α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση α της τροχαλίας.
β) Να υπολογιστούν οι τάσεις των νημάτων
γ) Για ανύψωση της τροχαλίας κατά h=15cm να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του συστήματος.
δ) Να βρεθεί η σχέση που δίνει τη στροφορμή του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και
ε) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Δίνεται για την τροχαλία $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Λύση:



α) M: $F-Mg-T_2-T_3=M\alpha$ (1)

$(T_2-T_3)R=\frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_2-T_3=\frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu}$(2)

m_1: $T_1-m_1g=m_1\alpha_1 \Rightarrow T_1-m_1g=m_1(\alpha-\alpha_{\gamma\omega\nu}R)$ (3)

m_2:$T_2-m_2g-T_1=m_2\alpha_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow T_2-m_2g-T_1=m_2(\alpha-\alpha_{\gamma\omega\nu}R)$ (4)

m_3:$T_3-m_3g=m_3\alpha_3 \Rightarrow T_3-m_3g=m_3(\alpha+\alpha_{\gamma\omega\nu}R)$ (5)

Από (3)∧(4)⇒
$T_2-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)\alpha-(m_1+m_2)\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ (6).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) , (5) , (6) προκύπτει:

$$290=13\alpha-\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (7)$$

Ακόμη:
(6)$\Rightarrow$ $T_2=(m_1+m_2)g+(m_1+m_2)\alpha-(m_1+m_2)\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ και
(5) $T_3=m_3g+m_3(\alpha+\alpha_{\gamma\omega\nu}R)$, με αντικατάσταση αυτών στη (2) έχουμε τελικά:

$$10+\alpha=0,4\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (8)$$

Από τη λύση του συστήματος των (7) και (8) προκύπτει
$290=13\cdot(0,4\alpha_{\gamma\omega\nu}-10)-\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow 290=5,2\,\alpha_{\gamma\omega\nu}-130-\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow 420=4,2\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=100\ rad/s^2$.
Τελικά $\alpha=0,4\alpha_{\gamma\omega\nu}-10\Rightarrow\alpha=30m/s^2$.

β) Η επιτάχυνση με την οποία κινούνται οι m_1 και m_2 προς τα πάνω είναι, $\alpha_1=\alpha-\alpha_{\gamma\omega\nu}R\Rightarrow\alpha_1=30-20=10m/s^2$, ενώ η επιτάχυνση της m_3 είναι,
$\alpha_3=\alpha+\alpha_{\gamma\omega\nu}R\Rightarrow\alpha_3=30+20=50m/s^2$.

(3)$\Rightarrow$ $T_1=m_1g+m_1\alpha_1\Rightarrow T_1=40+40\Rightarrow T_1=80N$.
(4)$\Rightarrow$ $T_2=m_2g+T_1+m_2\alpha_2\Rightarrow T_2=20+80+20\Rightarrow T_2=120N$.
(5)$\Rightarrow$ $T_3=m_3g+m_3\alpha_3\Rightarrow T_3=10+50\Rightarrow T_3=60\ N$.

γ) Ισχύει $h=\frac{1}{2}\alpha t^2$,$h_1=h_2=\frac{1}{2}\alpha_1t^2$, και $h_3=\frac{1}{2}\alpha_3t^2$ οπότε με διαίρεση κατά μέλη είναι:
$h_1=h_2=1/3h=5cm$ και παρόμοια $h_3=5/3h=25cm$. Τότε από το
Θ.Μ.Κ.Ε$\Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_F+W_w+W_{w1}+W_{w2}+W_{w3}\Rightarrow$
$K_{\tau\varepsilon\lambda}=F\cdot h-Mgh-(m_1+m_2)gh_1-m_3gh_3\Rightarrow$
$\Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}=420\cdot0,15-60\cdot0,15-60\cdot0,05-10\cdot0,25\Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}=48,5J$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και με τις εξισώσεις κίνησης:
$h=\frac{1}{2}\alpha t^2\Rightarrow t=0,1s$. Τότε $\upsilon_1=\upsilon_2=\alpha_1\cdot t=1m/s$. Ακόμη $\upsilon_3=\alpha_3\cdot t=5m/s$, $V=\alpha\cdot t=3m/s$ και $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=10rad/s$.
Άρα $K_{(M)}=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}I\omega^2$ με $I=\frac{1}{2}MR^2=0,12\ Kg\cdot m^2$, άρα $K_{(M)}=27+6=33J$,
$K_{(m1+m2)}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_1^2=3J$ και $K_{(m3)}=\frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2=12,5J$. Άρα
$K_{\tau\varepsilon\lambda}=33+3+12,5=48,5J$.

δ) $L_1=m_1R^2\omega$, όπου $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=100\cdot t\ rad/s$, δηλαδή $L_1=16\cdot t$, ακόμη

$L_2= m_2R^2\omega=8\cdot t$, $L_3= m_3R^2\omega=4\cdot t$ και για την τροχαλία είναι $L_{τροχ}=I\cdot\omega\Rightarrow$ $\Rightarrow L_{τροχ}=0,12\cdot 100t\Rightarrow L_{τροχ}=12\cdot t$. Τελικά για την ολική στροφορμή του συστήματος έχουμε:

$$L_{ολ}=40\cdot t \quad (S.I).$$

ε) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής θα έχουμε:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=I_{ολ}\cdot\alpha_{γων}\Rightarrow\frac{\Delta L}{\Delta t}=[I+(m_1+m_2+m_3)\cdot R^2]\cdot\alpha_{γων}\Rightarrow\frac{\Delta L}{\Delta t}=(0,12+0,28)\cdot 100\Rightarrow$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=40\ Kg\cdot m^2/s^2.$$