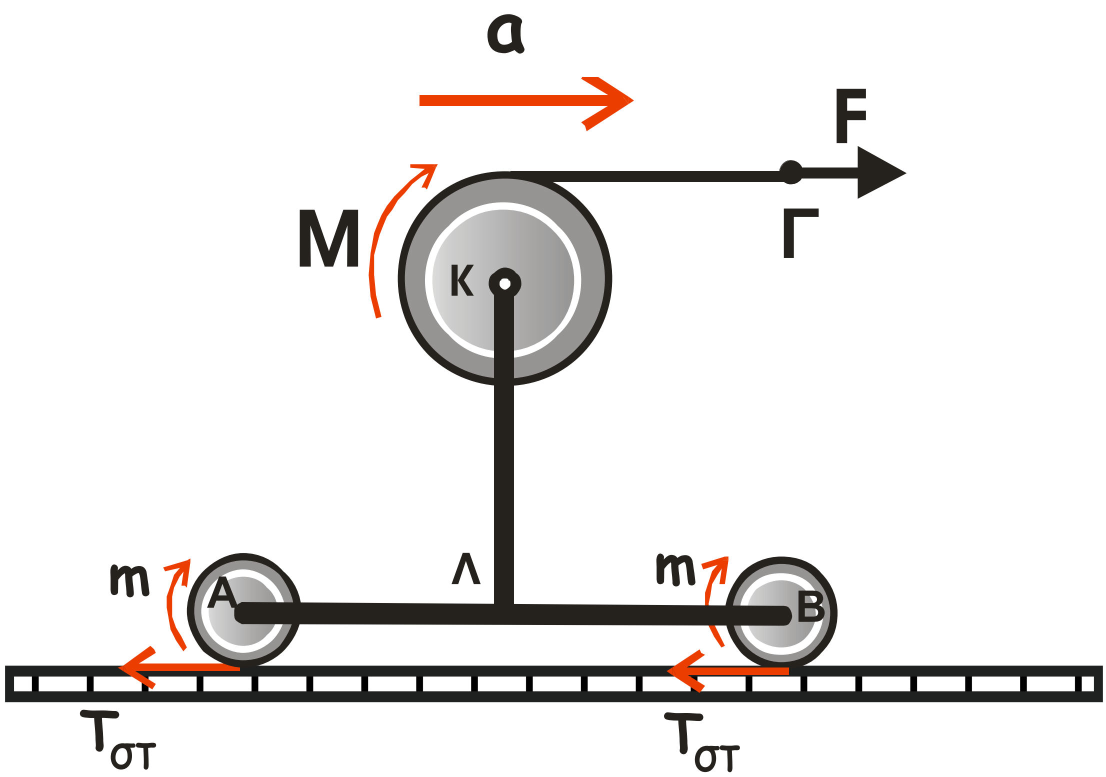
Τροχός και… κύλινδροι



Ο τροχός του σχήματος μάζας M=4Kg και ακτίνας R=0,2m μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του Κ. Ο άξονας στηρίζεται σε ράβδο ΚΛ και αυτή στην οριζόντια ράβδο ΑΒ. Οι ράβδοι έχουν αμελητέες μάζες. Στα άκρα της ράβδου ΑΒ συνδέονται με κατάλληλο τρόπο τα κέντρα μάζας δυο όμοιων κυλίνδρων μάζας $m=\frac{1}{3}$Kg ο καθένας και ακτίνας r=5cm. Οι ράβδοι δεν εμποδίζουν την περιστροφή και δεν ασκούν τριβές. Γύρω από τον τροχό μάζας Μ, είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί, το ελεύθερο άκρο του οποίου το τραβάμε με σταθερή οριζόντια δύναμη F=20N. Να υπολογιστούν:

α) Η μεταφορική επιτάχυνση του συστήματος.
β) Οι γωνιακές επιταχύνσεις του τροχού και των δυο κυλίνδρων.
γ) Η δύναμη που ασκείται από τον άξονα περιστροφής στον τροχό.
δ) Το έργο της δύναμης F, και η κινητική ενέργεια του τροχού καθώς και των δυο κυλίνδρων, όταν θα ξετυλιχθεί σχοινί μήκους L=1,8m.
ε) Η συνολική στροφορμή του συστήματος εκείνη τη στιγμή.
Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής

$I_K=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$ και η ροπή αδράνειας του κάθε κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής $I=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2$. Ακόμη δίνεται $g=10m/s^2$.

Λύση:

α)Από τη στροφική κίνηση του κάθε κυλίνδρου έχουμε:
$T_{στ}\cdot r=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2\cdot α_{2γων} \Rightarrow T_{στ}\cdot r=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2\cdot\frac{α}{r}$ ισχύει $α=α_{2γων}\cdot r$
Τότε $T_{στ}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot α$ (1).

Από τη μεταφορική κίνηση του συστήματος έχουμε:

$ΣF=m_{ολ}\cdot α \Rightarrow F-2T_{στ}=(M+2m)\cdot α \Rightarrow F-m\cdot α=(M+2m)\cdot α \Rightarrow F=(M+3m)α \Rightarrow$
$\Rightarrow α=\frac{F}{M+3m} \Rightarrow α=4m/s^2$.

β) Από τη στροφική κίνηση του τροχού έχουμε:
$F\cdot R=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot α_{1γων} \Rightarrow F=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R\cdot α_{1γων} \Rightarrow α_{1γων}=\frac{2F}{M\,R} \Rightarrow α_{1γων}=50rad/s^2$.
Ακόμη ισχύει $α=α_{2γων}\cdot r \Rightarrow α_{2γων}=\frac{α}{r} \Rightarrow α_{2γων}=80rad/s^2$.

γ) Για τη μεταφορική κίνηση του τροχού ισχύει $F-N_x=M\cdot α \Rightarrow N_x=F-M\cdot α \Rightarrow$ $\Rightarrow N_x=4N$. Από την ισορροπία του στον κατακόρυφο άξονα έχουμε $N_y=M\cdot g \Rightarrow N_y=40N$. Τότε $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2} \Rightarrow N=\sqrt{1616}$ N με εφθ=10.

δ) Για το νήμα ισχύει $L=R\cdot θ=R\cdot\frac{1}{2}\cdot α_{1γων}\cdot t^2$. Για τη μετατόπιση του κέντρου μάζας Κ, του τροχού ισχύει $x_K=\frac{1}{2}\cdot α\cdot t^2$, τότε προκύπτει $\frac{x_K}{L}=\frac{α}{α_{1γων}R} \Rightarrow \frac{x_K}{L}=\frac{4}{10} \Rightarrow x_K=0,4L$. Ακόμη ισχύει $x_Γ=L+x_K \Rightarrow$
$\Rightarrow x_Γ=1,4L=2,52m$.

Τότε για το έργο της δύναμης F θα έχουμε $W_F=F\cdot x_\Gamma=20\cdot 2{,}52=50{,}4J$.
Για την κινητική ενέργεια του τροχού έχουμε
$K_M=\frac{1}{2}\cdot M\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}I_K\omega_1^2\Rightarrow K_M=\frac{1}{2}\cdot M\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot\omega_1^2$. Όμως $\omega_1=\alpha_{1\gamma\omega\nu}\cdot t$ και $\upsilon=\alpha\cdot t$, τότε προκύπτει $\frac{\omega_1}{\upsilon}=\frac{\alpha_{1\gamma\omega\nu}}{\alpha}\Rightarrow\omega_1=\frac{25}{2}\cdot\upsilon$.
Τότε $K_M=\frac{1}{2}\cdot M\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot M\cdot(\frac{25}{2}\cdot\upsilon.R)^2\Rightarrow K_M=2\cdot\upsilon^2+\frac{25}{4}\cdot\upsilon^2\Rightarrow K_M=\frac{33}{4}\cdot\upsilon^2$.
Παρόμοια για την κινητική ενέργεια του κάθε κυλίνδρου θα έχουμε
$K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2.\omega_2^2\Rightarrow$
$\Rightarrow K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2\Rightarrow K=\frac{3}{4}\cdot m\cdot\upsilon^2$, άρα για τη συνολική κινητική ενέργεια των δυο κυλίνδρων θα έχουμε $K_m=2\cdot K\Rightarrow K_m=\frac{3}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2\Rightarrow$
$\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\cdot\upsilon^2$.
Από το Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_F\Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}=W_F\Rightarrow(K_M+K_m)=W_F\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{35}{4}\cdot\upsilon^2=50{,}4\Rightarrow\upsilon^2=5{,}76\Rightarrow\upsilon=2{,}4m/s$.
Βέβαια την ταχύτητα μπορούμε να τη βρούμε και από τη σχέση
$\upsilon=\sqrt{2\alpha x_K}\Rightarrow\upsilon=\sqrt{2.4.0{,}4.1{,}8}\Rightarrow\upsilon=\sqrt{5{,}76}\Rightarrow\upsilon=2{,}4m/s$.
Τότε έχουμε $K_M=\frac{33}{4}\cdot\upsilon^2\Rightarrow K_M=\frac{33}{4}\cdot 5{,}76\Rightarrow K_M=47{,}52J$ και $K_m=\frac{1}{2}\cdot\upsilon^2\Rightarrow$
$\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\cdot 5{,}76\Rightarrow K_m=2{,}88J$.

ε) Για τη στροφορμή του τροχού έχουμε $L_M=I_K\cdot\omega_1$. Όμως $\omega_1=\frac{25}{2}\cdot\upsilon\Rightarrow$
$\Rightarrow\omega_1=30$ rad/s και $I_K=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\Rightarrow I_K=2\cdot 0{,}04=0{,}08Kg\cdot m^2$. Άρα
$L_M=30\cdot 0{,}08\Rightarrow L_M=2{,}4Kg\cdot m^2/s$. Για τη στροφορμή του κάθε κυλίνδρου έχουμε $L_m=I\cdot\omega_2$, όπου $\omega_2=\frac{\upsilon}{r}=48rad/s$ και $I=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2\Rightarrow I=\frac{25}{6}\cdot 10^{-4}Kg\cdot m^2$.
$L_m=48\cdot\frac{25}{6}\cdot 10^{-4}\Rightarrow L_m=2\cdot 10^{-2}Kg\cdot m^2/s$. Τελικά
$L_{o\lambda}=L_M+2\cdot L_m=244\cdot 10^{-2}\ Kg\cdot m^2/s$.
Παρατήρηση: ισχύει $\upsilon=\alpha\cdot t\Rightarrow t=\frac{2{,}4}{4}=0{,}6s$. Και $\omega_1=\alpha_{1\gamma\omega\nu}\cdot t=30$ rad/s και $\omega_2=\alpha_{2\gamma\omega\nu}\cdot t=48rad/s$.