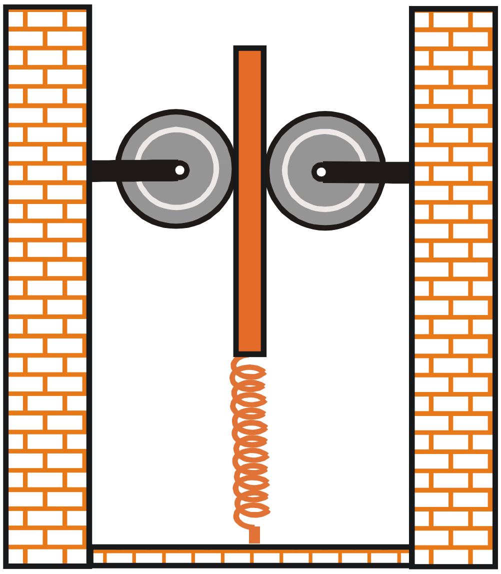
Ράβδος μάζας M είναι δεμένη στο ένα άκρο της σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K, όπως φαίνεται στο σχήμα και ισορροπεί. Η ράβδος ακουμπά επίσης πάνω στους δυο δίσκους της ίδιας μάζας M, και ακτίνας R. Τότε:



α) Να δείξετε πως αν απομακρύνουμε τη ράβδο από τη θέση ισορροπίας της και την αφήσουμε ελεύθερη τότε αυτή πραγματοποιεί α.α.τ. και

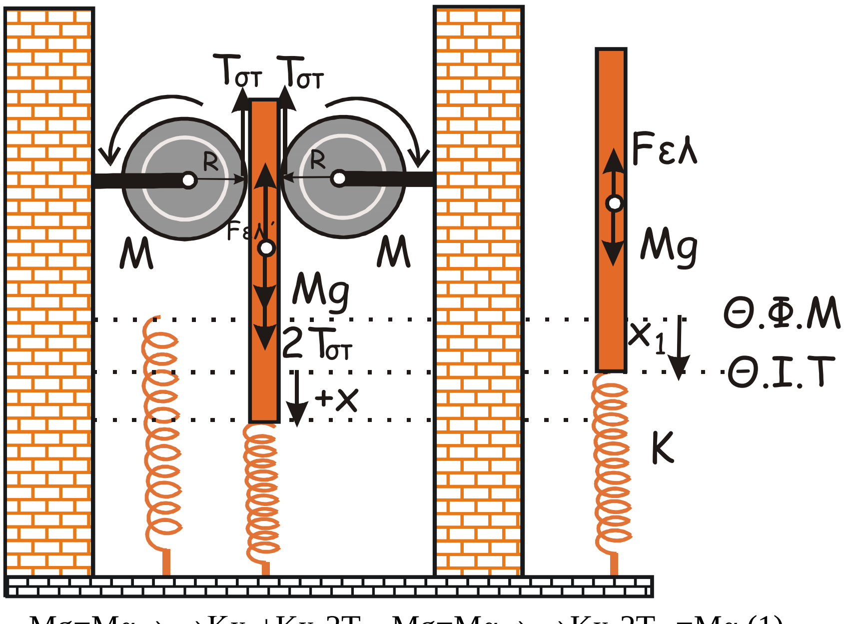
β) Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης που πραγματοποιεί η ράβδος

Θεωρούμε ότι η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, ότι δεν παρατηρείται ολίσθηση μεταξύ ράβδου και δίσκων και ότι η ροπή αδράνειας του κάθε δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου είναι: $I_{cm}=1/2MR^2$.

Λύση:

α) Για τη θέση ισορροπίας της ράβδου έχουμε: $\Sigma F=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Mg= F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$ $\Rightarrow Mg=Kx_1$.

Για τη μεταφορική κίνηση της ράβδου σε μα τυχαία θέση έχουμε: (εδώ συμπιέσαμε το ελατήριο προς τα κάτω κατά +x):



$\Sigma F=M\alpha \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda}-2T_{\sigma\tau}-Mg=M\alpha \Rightarrow \Rightarrow Kx_1+Kx-2T_{\sigma\tau}-Mg=M\alpha \Rightarrow \Rightarrow Kx-2T_{\sigma\tau}=M\alpha$ (1).

Για τον κάθε δίσκο και για τη στροφική του κίνηση θα έχουμε:

$\Sigma\tau=I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}R=\frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha}{R} \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}M\alpha$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $Kx=2M\alpha$ (3). Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει $\frac{T_{\sigma\tau}}{Kx}=\frac{1}{4} \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{1}{4}Kx$ (4).

Τότε για την τυχαία θέση της ράβδου έχουμε $\Sigma F= 2T_{\sigma\tau} +Mg-F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma F= \frac{1}{2}Kx +Mg- Kx_1-Kx \Rightarrow \Sigma F= \frac{1}{2}Kx -Kx \Rightarrow \Sigma F= -\frac{1}{2}Kx \Rightarrow \Sigma F=- D\cdot x$ άρα έχουμε α.α.τ με $D=\frac{K}{2}$.

β) Για την περίοδο της ταλάντωσης έχουμε $T=2\pi\sqrt{\frac{2M}{K}}$.