

Σημεία Προσοχής στην Παράγραφο Ε2.

1. Ίσα Σύνολα

Δεν αρκεί δύο σύνολα να έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων για να είναι ίσα. Πρέπει να έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

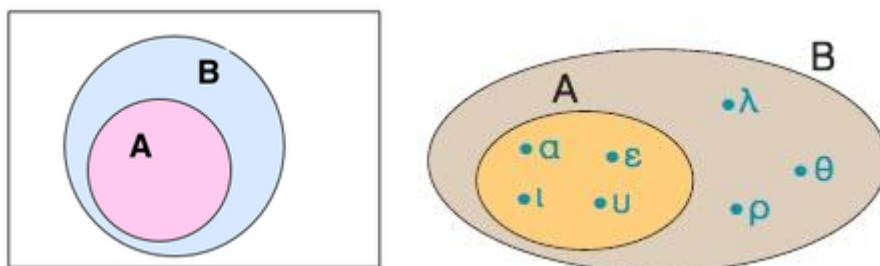
Έχουμε τα σύνολα $A=\{1,\alpha,5\}$ και $B=\{\beta,2,5\}$. Μπορεί να είναι ίσα και αν ναι, ποιες τιμές πρέπει να πάρουν οι μεταβλητές α και β για να είναι τα σύνολα ίσα;

Και τα δύο σύνολα έχουν τρία στοιχεία, επομένως μπορεί να είναι ίσα αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Βλέπουμε ότι και τα δύο σύνολα περιέχουν τον αριθμό 5. Όμως το σύνολο A , έχει το στοιχείο 1 που δεν υπάρχει στο B . Για να είναι λοιπόν ίσα θα πρέπει ο αριθμός β να είναι ίσος με 1. Άρα τα σύνολα θα έχουν την μορφή $A=\{1,\alpha,5\}$ και $B=\{1,2,5\}$. Για να είναι λοιπόν ίσα θα πρέπει ο αριθμός α να είναι ίσος με 2 ώστε και τα δύο σύνολα να περιέχουν τα στοιχεία 1,2,5.

2. Υποσύνολο Συνόλου

Ένα σύνολο A θα λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Επομένως το σύνολο B θα περιέχει μεγαλύτερο ή ίσο στο πλήθος αριθμό στοιχείων με το A . Στην καλύτερη περίπτωση (γνήσιο υποσύνολο) το σύνολο B θα περιέχει περισσότερα στοιχεία από το A καθώς θα περιέχει όλα τα στοιχεία του A και κάποια ακόμη.

Διαγραμματικά έχουμε το παρακάτω διάγραμμα Venn.



Το σύνολο A είναι "μέσα" στο σύνολο B , τότε το A είναι υποσύνολο του B .

Παράδειγμα

$A=\{0,2,4,6,8,\dots,52\}$ δηλ τα πολλαπλάσια του 2 μέχρι το 52

και $B=\{0,4,8,12,16,\dots,52\}$ δηλ τα πολλαπλάσια του 4 μέχρι το 52

Κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι και στοιχείο του συνόλου A. Προσοχή το ανάποδο δεν ισχύει. Το στοιχείο 2 ανήκει στο A αλλά όχι στο σύνολο B. Άρα το A περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου B αλλά και κάποια ακόμη. Επομένως το σύνολο B είναι υποσύνολο του A και γράφουμε $B \subseteq A$.

Προσοχή

$A \subseteq A$

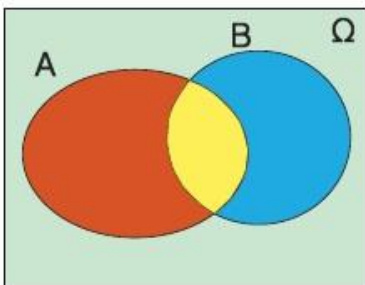
ΑΝ $A \subseteq B$ ΚΑΙ $B \subseteq \Gamma$ ΤΟΤΕ $A \subseteq \Gamma$ (αφού κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B άρα και στοιχείο του Γ)

ΑΝ $A \subseteq B$ ΚΑΙ $B \subseteq A$ ΤΟΤΕ $A=B$ (αφού κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντίστροφα κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A άρα τα σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία άρα είναι ίσα.

3. Πράξεις Συνόλων

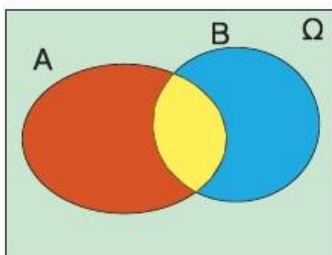
ΠΑΡΑΘΕΤΟΥΜΕ ΑΡΧΙΚΑ ΚΑΠΟΙΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΕΝΑΝ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ.

A) ΈΝΩΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ



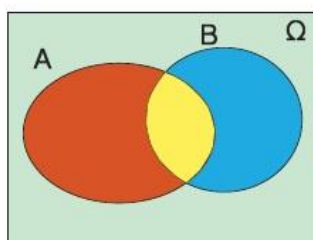
Αν a είναι στοιχείο της ένωσης δύο συνόλων A και B τότε το στοιχείο a μπορεί να ανήκει στο σύνολο A ή στο σύνολο B (δηλαδή μπορεί να ανήκει και στα δύο σύνολα) δηλαδή μπορεί να ανήκει στο κόκκινο ή στο κίτρινο ή στο μπλε χρώμα.

B) ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ



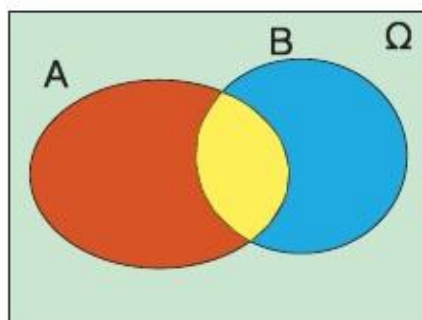
Αν έχουμε ένα στοιχείο της τομής, τότε αυτό θα είναι αναγκαστικά στοιχείο και του συνόλου A και του συνόλου B, δηλαδή θα ανήκει στο κίτρινο χρώμα.

Γ) ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΥ Β ΑΠΟ ΤΟ Α (A-B) - ΜΟΝΟ ΣΤΟ Α



Αν ένα στοιχείο ανήκει μόνο στο σύνολο A σημαίνει ότι δεν ανήκει στο σύνολο B, άρα θα βρίσκεται στο κόκκινο χρώμα.

Δ) ΜΟΝΟ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ Α ΚΑΙ Β.

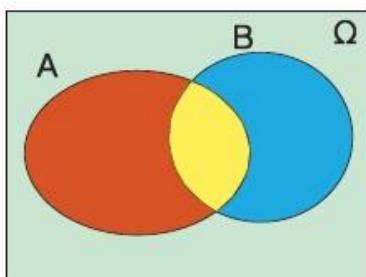


Ένα στοιχείο του συνόλου αυτού θα είναι στοιχείο μόνο του A ή μόνο του B. Άρα θα ανήκει ή στο κόκκινο ή στο μπλε χρώμα. Επίσης αυτό το σύνολο μπορεί να εκφραστεί με τους παρακάτω τρόπους:

$$(A-B) \cup (B-A) \text{ ή}$$

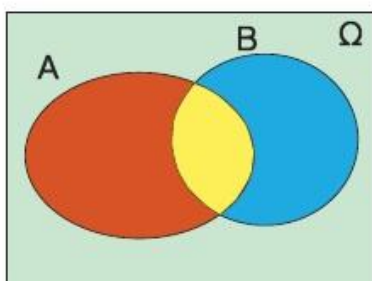
$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Ε) ΤΟ ΠΟΛΥ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ









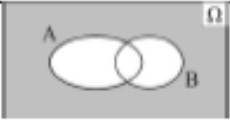

Αυτό σημαίνει ή σε κανένα από τα δύο ή μόνο σε ένα από τα δύο. Άρα ένα στοιχείο του συνόλου αυτού ή δεν θα ανήκει σε κανένα από τα A και B ή θα ανήκει μόνο στο A ή μόνο στο B. Άρα θα είναι στο ή στο κόκκινο ή στο μπλε χρώμα. Το σύνολο αυτό μπορεί να εκφραστεί ως $\Omega - (A \cap B)$ δηλαδή όλα τα στοιχεία εκτός από αυτά που ανήκουν και στο A και στο B.

ΣΤ) ΣΕ ΚΑΝΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΑ



Επομένως τα στοιχεία αυτού του συνόλου δεν θα ανήκουν ούτε στο A ούτε στο B δηλαδή σε κανένα από τα κόκκινο, κίτρινο και μπλε χρώμα.

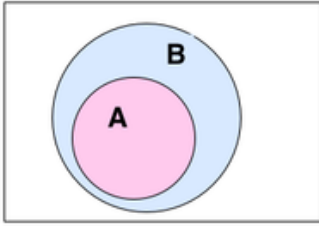
Παρατηρήστε και στον παρακάτω πίνακα τις ονομασίες αλλά και τα διαγράμματα Venn της κάθε γραμμής

Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Επεξήγηση	Διάγραμμα Venn
A'	όχι A	Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A	
$A \cup B$	A ή B	Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	
$A \cap B$	A και B	Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A, B	
$A - B = A \cap B'$	Διαφορά του B από το A	Το $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	
$B - A = B \cap A'$	Διαφορά του A από το B	Το $B - A$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A	
$(A - B) \cup (B - A)$	Διαφορά του B από το A ή διαφορά του A από το B	Το $(A - B) \cup (B - A)$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B	
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	όχι A ή B	Το $(A \cup B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B	
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	όχι A και B	Το $(A \cap B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B	

4. Βασικές Σχέσεις και Ερμηνεία

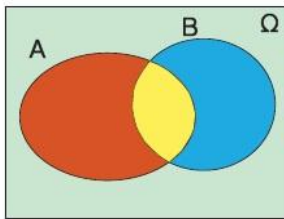
- $(A')' = A \longrightarrow$ Δεν ανήκει στο συμπληρωματικό του A δηλαδή ανήκει στο A
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \longrightarrow$ με απλά λόγια η τομή είναι μικρότερη από το A ενώ η ένωση είναι μεγαλύτερη και του A και του B .

- Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$ και $A \cap B = A$



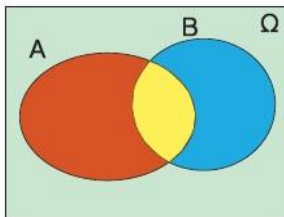
Δηλαδή η ένωση είναι ίση με το μεγαλύτερο σύνολο και η τομή ίση με το μικρότερο.

- $A \cup A' = \Omega$ \longrightarrow Τα στοιχεία που ανήκουν στο A και αυτά που δεν ανήκουν στο A συμπληρώνουν τον δειγματικό χώρο Ω .
- $A \cap A' = \emptyset$ \longrightarrow Το A και το A' δεν έχουν κοινά στοιχεία.
- $\emptyset' = \Omega$ και $\Omega' = \emptyset$
- $(A-B) \subseteq A$



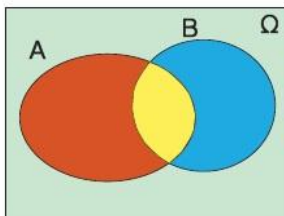
Το κόκκινο σύνολο είναι υποσύνολο του A (δηλαδή του κόκκινου και του κίτρινου)

- $(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) = A \cup B$



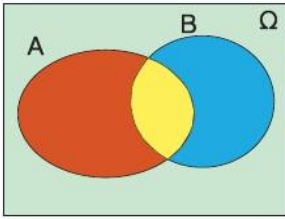
Δηλαδή το κόκκινο μαζί με το κίτρινο μαζί με το μπλε σύνολο μας κάνουν την ένωση των συνόλων A και B.

- $(A-B) \cup (A \cap B) = A$



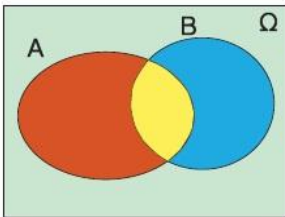
Δηλαδή το κόκκινο σύνολο μαζί με το κίτρινο σύνολο μας κάνουν το σύνολο A.

- $(A \cup B) - (A - B) = B$



Δηλαδή αν από την ένωση των δύο συνόλων (και από τα τρία χρώματα δηλαδή), αφαιρέσουμε το κόκκινο χρώμα θα μείνει το σύνολο B (κίτρινο και μπλε)

- $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$



Δηλαδή αν ενώσουμε το κόκκινο μαζί με το μπλε χρώμα τότε είναι το ίδιο αν από τα τρία χρώματα αφαιρέσουμε το κίτρινο, δηλαδή την τομή τους.

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A \cup B'$

- $A' - B' = B - A$

- $(B - A)' = A \cup B'$

Δείτε στο site λυμένα παραδείγματα. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να συζητήσουμε κάθε απορία σας στο site στο μενού "Ας συζητήσουμε".