Ενότητα Δεύτερη: Όρια στο x_0

Μάθημα 1º: Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίου

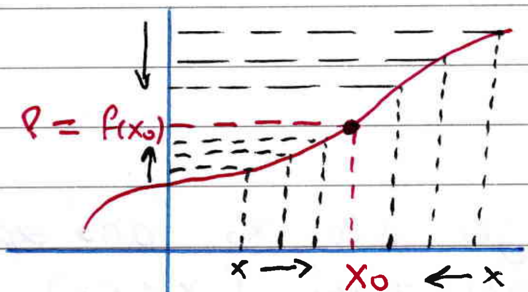
1. Ορισμός Ορίου

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f, προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο έναν πραγματικό αριθμό x_0, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

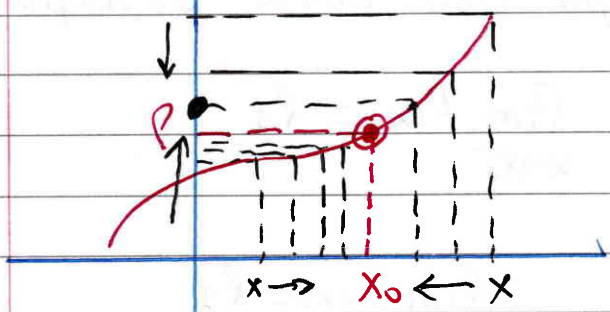
και λέμε ότι το όριο της συνάρτησης f, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ο αριθμός ℓ.

Ας δούμε όμως και γραφικά τι σημαίνει αυτό.



1η Περίπτωση

Βλέπουμε ότι καθώς το x πλησιάζει (είτε από αριστερά, είτε από δεξιά) στο x_0, οι τιμές της f πλησιάζουν στο $\ell = f(x_0)$

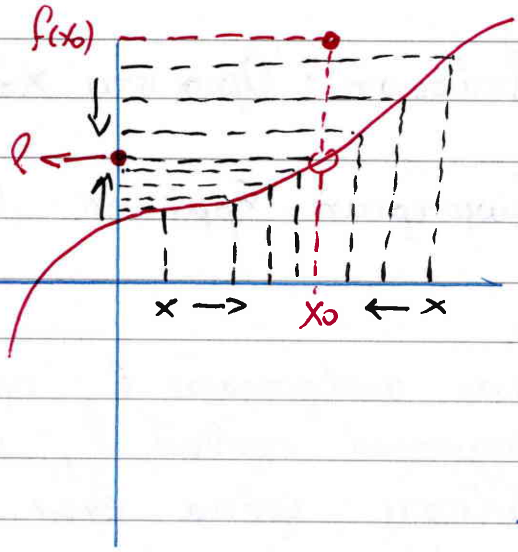


2η Περίπτωση:

Εδώ δεν υπάρχει το $f(x_0)$ δλδ το $x_0 \notin A_f$.

Παρόλο όμως που δεν ορίζεται το $f(x_0)$, ορίζεται το $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αφού πάλι

οι τιμές της f πλησιάζουν το ℓ, όταν το x πλησιάζει το x_0



3η Περίπτωση
Εδώ υπάρχει το $f(x_0)$.
Όμως όταν το x πλησιάζει στο x_0 $(x \to x_0)$ η f πλησιάζει στον αριθμό ℓ.

Άρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$

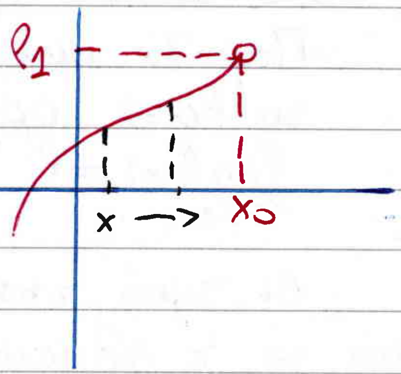
Επομένως το $\lim_{x \to x_0} f(x)$, έχει να κάνει με την συμπεριφορά της f όταν το x είναι "κοντά" στο x_0.

Τότε αν υπάρχει το $f(x_0)$ μπορεί $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

ενώ αν δεν υπάρχει το $f(x_0)$ μπορεί κάλλιστα να υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

2. Πλευρικά Όρια

- Αν το x πλησιάζει στο x_0 "από αριστερά", δηλαδή από μικρότερες τιμές $(x < x_0)$ και τότε η f πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στον αριθμό ℓ_1, τότε λέμε ότι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$.

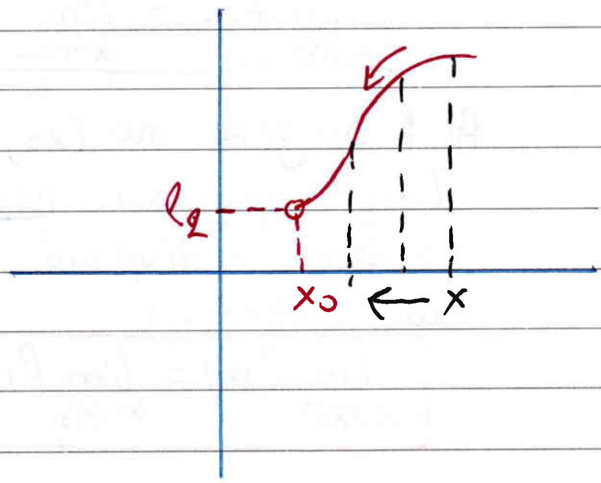


$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$

Το x πλησιάζει στο x_0 μόνο από αριστερά.

- Αν καθώς το x πλησιάζει στο x_0 "από δεξιά", δηλαδή από μεγαλύτερες τιμές ($x>x_0$), τότε οι τιμές της f πλησιάζουν όσο κοντά θέλουμε στο ℓ_2, τότε λέμε ότι:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$$



Εδώ το x πλησιάζει στο x_0, από δεξιά μόνο!!!

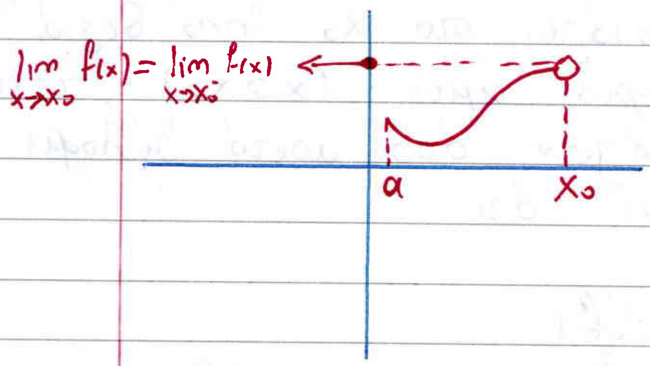
- Τους αριθμούς ℓ_1 και ℓ_2 τους ονομάζουμε πλευρικά όρια της f όταν x τείνει στο x_0.

$\ell_1 \to$ αριστερό πλευρικό όριο $= \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

$\ell_2 \to$ δεξί πλευρικό όριο $= \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

Τι σχέση έχουν όμως μεταξύ τους και με το $\lim_{x\to x_0} f(x)$;

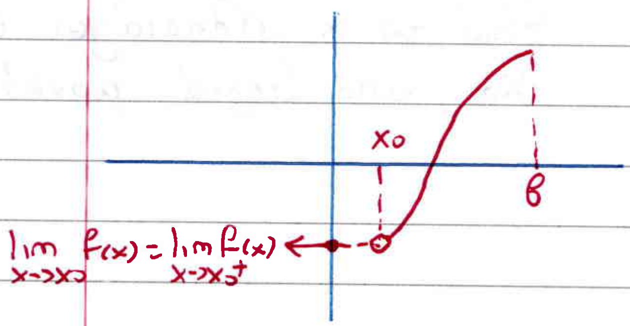
Θα απαντήσουμε στα παρακάτω σχήματα!!!



Η f ορίζεται στο (α, x_0)

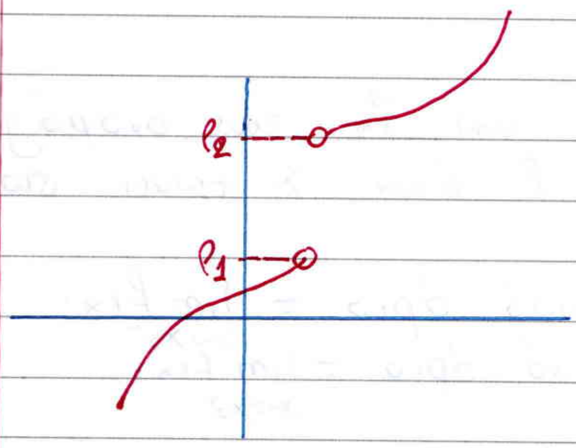
Το x προσεγγίζει το x_0 μόνο από αριστερά.
Άρα υπάρχει μόνο το αριστερό πλευρικό όριο και ισχύει

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)}$$



Η f ορίζεται στο (x_0, β)
Τότε ορίζεται ΜΟΝΟ το δεξί πλευρικό όριο, και ισχύει

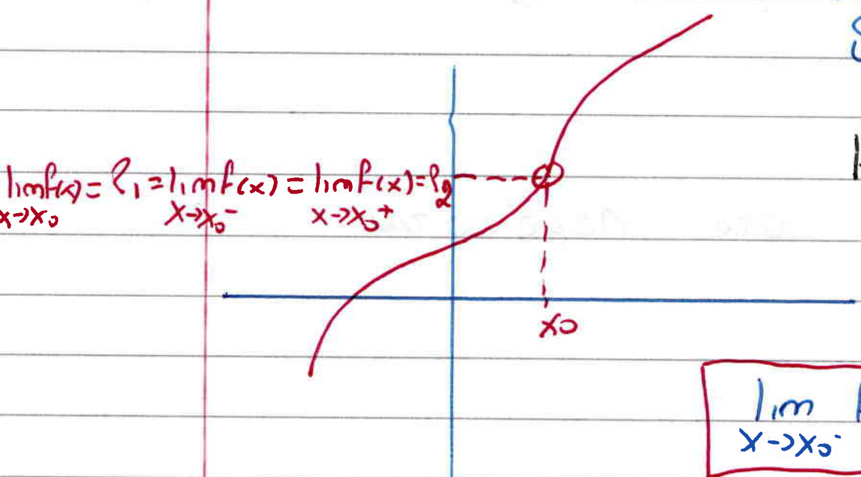
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)}$$



Η f ορίζεται στο (α, β).

Ορίζονται και τα δύο πλευρικά ΑΛΛΑ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ!
Υπάρχει $\ell_1 = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$,

υπάρχει το $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$



Η f ορίζεται στο (α, β)
Εδώ τα πλευρικά όρια είναι ίσα.
Τότε λέμε:

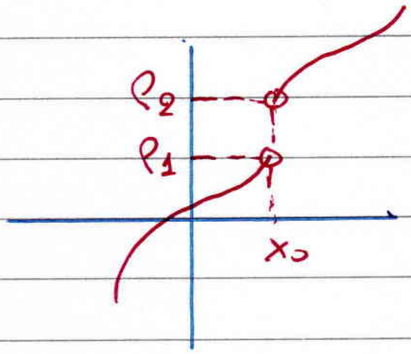
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)}$$

Προσοχή, τα παραπάνω όρια μπορεί να είναι ίσα και με $f(x_0)$

1º

Δηλαδή Πότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$;

Να ορίζονται και τα δύο πλευρικά όρια, αλλά να είναι διαφορετικά!!



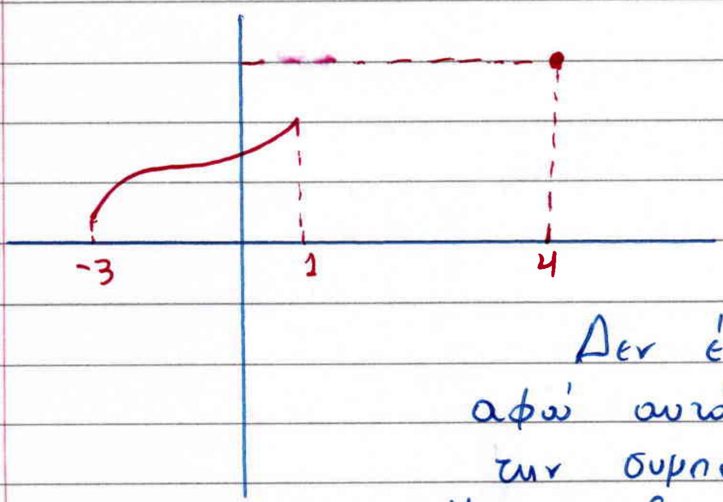
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$!!!

Βλέπουμε ότι η C_f παρουσιάζει ένα άλμα, μια διακοπή!!!

Πότε δεν έχει νόημα να ψάξουμε για το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Δείτε το παρακάτω σχήμα



Εδώ η f ορίζεται στο $[-3, +1] \cup \{4\}$

Ποιο είναι το $\lim_{x \to 4} f(x)$;

Δεν έχει νόημα το $\lim_{x \to 4} f(x)$ αφού αυτό "εκφράζει" την συμπεριφορά της f "κοντά στο 4". Μα η f δεν ορίζεται "κοντά στο 4" άρα τι συμπεριφορά να έχει;

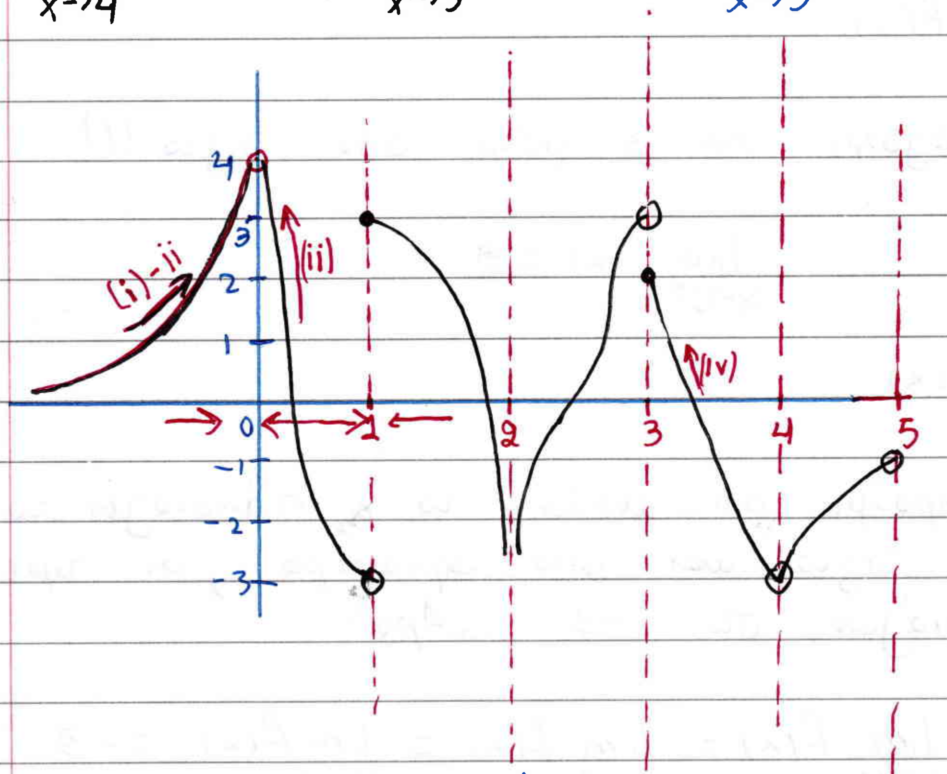
Προσοχή: Το όριο δεν έχει νόημα – Όχι δεν υπάρχει!! Μπορεί να έχει νόημα αλλά να μην υπάρχει!!!

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Από την γραφική παράσταση της f που ακολουθεί, να υπολογίσετε τα παρακάτω:

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

$\lim_{x\to 4} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$ $\lim_{x\to 5} f(x)$, $\lim_{x\to 5^+} f(x)$



Λυση

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

Βλεπουμε μόνο αριστερά του μηδενός , άρα
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$$

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Πρεπει να δουμε και από αριστερά και δεξιά του μηδενός.

Βλεπουμε οτι
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 4 \text{ . Αρα } \lim_{x\to 0} f(x) = 4.$$

iii) $\lim_{x \to 1} f(x)$

"Κοιτάμε αριστερά και δεξιά του 1"

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -3$ ενώ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \to 1} f(x)$.

iv) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

Πλησιάζουμε στο 3 μόνο από δεξιά!!!

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$$

v) $\lim_{x \to 4} f(x)$

Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει το 4 και από δεξιά και από αριστερά, οι τιμές της f πλησιάζουν στο -3. Άρα

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} f(x) = -3$$

vi) $\lim_{x \to 3} f(x)$.

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3$ ενώ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$

Δεν υπάρχει το $\lim_{x \to 3} f(x)$

vii) $\lim_{x \to 5} f(x)$

1ο

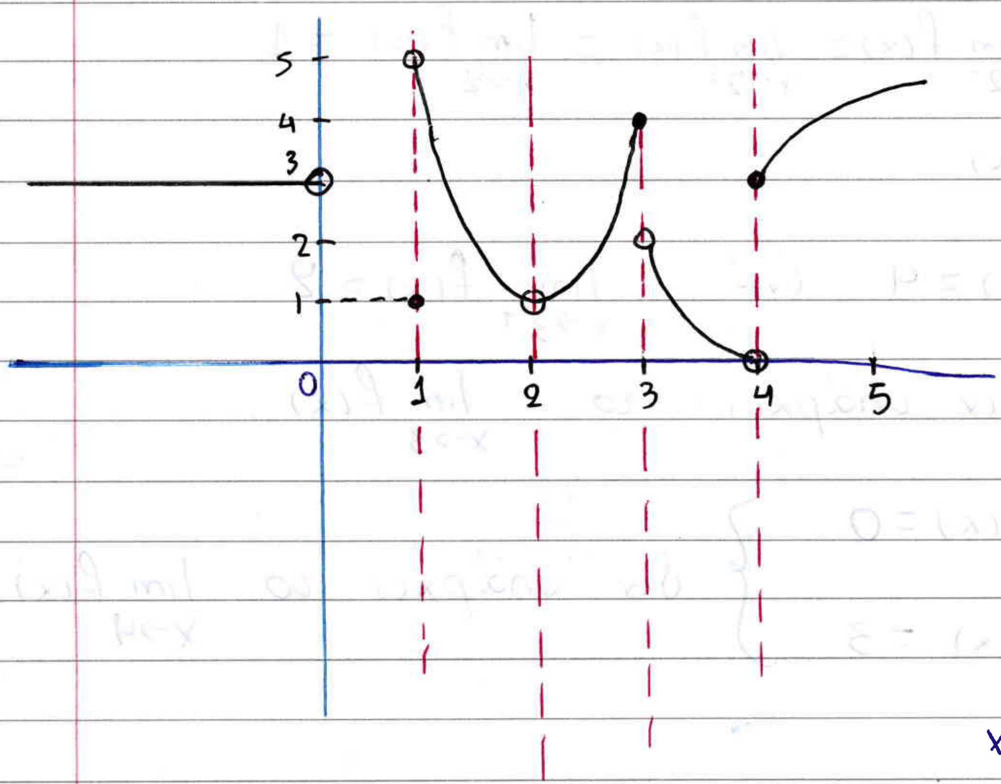
Προσοχή εδώ δεν έχει νόημα να ψάξουμε το $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$ αφού το x δεν μπορεί να πλησιάσει το 5 από μεγαλύτερες τιμές!!!

Άρα $\lim\limits_{x\to5} f(x) = \lim\limits_{x\to5^-} f(x) = -1$

Ορίζεται δηλ. μόνο το $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$ που είναι ίσο με το $\lim\limits_{x\to5} f(x)$.

vii) Όπως είπαμε και πριν, δεν έχει νόημα να ψάξουμε το $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$.

2ο Λυμένο Παράδειγμα



Βρείτε τα

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to3} f(x)$

$\lim\limits_{x\to4} f(x)$

(i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 3$

Δεν έχει νόημα το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

ii) Το $\lim_{x\to 1} f(x)$

Προσοχή δεν έχει νόημα το $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

Όμως ορίζεται το $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 5$, άρα

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 5$$

iii) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 5$ (από το ii)

iv) $\lim_{x\to 2} f(x) = ;$

Ορίζονται και τα δύο πλευρικά όρια και είναι ίσα!

Άρα $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 1$

v) $\lim_{x\to 3} f(x)$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ ενώ $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$

vi) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = 3 \end{array}\right\}$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$.