Μάθημα 2º: Ιδιότητες Ορίων

1η Ιδιότητα

Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = 0$$

2η Ιδιότητα

Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x)$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

ii) $\lim_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

iv) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ εφ' όσον $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

v) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right|$

vi) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ εφ' όσον $f(x_0) \geq 0$ κοντά στο x_0.

vii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^\nu = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

viii) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$

3η Ισιότητα

Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$
- $\lim\limits_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu$
- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
- Αν $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $Q(x_0) \neq 0$ τότε

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

1º Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε το όριο $\lim_{x \to 3}\left(\sqrt{5x-x^2-4} - \sqrt{7x-x^2-10}\right)$

Λύση

Προσοχή!!!

Θα βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού γιατί μπορεί το όριο να μην έχει νόημα!!!

Πρέπει $5x-x^2-4 \geq 0$ και $7x-x^2-10 \geq 0$

Αφού λύσουμε και συναληθεύσουμε τις δύο ανισώσεις, βρίσκουμε: $A_f = [2,4]$

Άρα έχει νόημα το όριο (αφού θέλουμε $x \to 3$)

Υπολογισμός

$$\lim_{x \to 3}\left(\sqrt{5x-x^2-4} - \sqrt{7x-x^2-10}\right) =$$

$$\lim_{x \to 3}\sqrt{5x-x^2-4} - \lim_{x \to 3}\sqrt{7x-x^2-10}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 3}(5x-x^2-4)} - \sqrt{\lim_{x \to 3}(7x-x^2-10)}$$

$$= \sqrt{5 \cdot 3 - 3^2 - 4} - \sqrt{7 \cdot 3 - 3^2 - 10}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

2º Λυμένο Παράδειγμα

Αν $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ και $\lim_{x\to 3} g(x) = 1$

υπολογίστε το παρακάτω όριο.

$$A = \lim_{x\to 3}\left[(x+1)f^2(x) - x^2\sqrt{g^2(x)+3}\right]$$

Λύση

Εφ' όσον υπάρχουν τα όρια έχουμε:

$$A = \lim_{x\to 3}(x+1)\cdot\left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]^2 - \left(\lim_{x\to 3} x\right)^2\cdot\sqrt{\left(\lim_{x\to 3} g(x)\right)^2+3}$$

$$=(3+1)\cdot 2^2 - 3^2\cdot\sqrt{1^2+3} = -2$$

3º Λυμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το οριο $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+4x-6}{x^2-4x+5} = A$

Λυση

Όταν δεν θα έχουμε πρόβλημα με την ύπαρξη, ή κάποιους περιορισμούς, θα κάνουμε κατευθείαν αντικατάσταση όπου x το 3.

Άρα $A = \dfrac{3^3-5\cdot 3^2+4\cdot 3-6}{3^2-4\cdot 3+5} = -6$

4º Λυμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το όριο

$$A=\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{-x^2+2x+8}+\sqrt{x^2-5x+4}\right)$$

Λύση

Λογικό αν κάνουμε αντικατάσταση, θα έχουμε:

$$A=\sqrt{-16+8+8}+\sqrt{16-20+4}=0+0$$

Έχουμε όμως κάνει ΛΑΘΟΣ!!!

Δεν υπολογίσαμε το Πεδίο Ορισμού, και έτσι υπάρχει περίπτωση να υπολογίσαμε ένα όριο που δεν έχει καν νόημα!!!

Πεδίο Ορισμού

$-x^2+2x+8\geq 0$ και $x^2-5x+4\geq 0$

Συναληθεύοντας τις ανισώσεις, βρίσκουμε:

$$A_f=[-2,1]\cup\{4\}$$

Άρα το $\lim_{x\to 4} f(x)$ δεν έχει νόημα αφού η f δεν ορίζεται κοντά στο 4.

Άλυτα Παραδείγματα

① Αν $\lim_{x\to 3} f(x)=4$ και $\lim_{x\to 3} g(x)=-2$ υπολογίστε το $\lim_{x\to 3} \dfrac{|f(x)+3g(x)|}{\sqrt{f(x)}+g^3(x)}$

② Αν $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ και $\lim_{x\to 2} g(x)=1$ υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)f^2(x)-x\cdot g(x)}{f^2(x)+g^2(x)-x^2-1}$$

③ Υπολογίστε τα όρια:

α) $\lim_{x\to 7} (x^2+1-\sqrt{x-3})$

β) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+2+\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{x^2+5}+x+1}$

γ) $\lim_{x\to 2^-} (\sqrt{4-x^2}-\sqrt{x-x^2})$

δ) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x^3+5x-7}{|2x+1|-5}$

ε) $\lim_{x\to -2} (-3x^3-4x^2+5x+6)$

④ Αν $\lim_{x\to 2} f(x)=2$ υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+\sqrt{f^2(x)+5}}{f^2(x)+f(x)+1}$$