

Άσκήσεις στα Όρια

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{αν} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x-1} - 1}{x - 3\sqrt{x+2} + 4} & , 1 \leq x < 2 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}} & , x > 2 \end{cases}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{αν} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} & , x > 1 \\ \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - x} & , x < 1 \end{cases}$$

$$2) \text{ Έστω } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{\sqrt{x+5}-2} & , -5 \leq x \leq -1 \\ ax+a-7 & , -1 < x < 2 \\ \frac{x^2-4}{x^2-9x} & , x > 2 \end{cases}$$

i) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ βρείτε το a

ii) Για το a να βεβαιωθείτε εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

3) Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-2x|}{\sqrt{|x^2-2x|+4} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-x| + |-x^2-2x+3| + x^3-1}{x^2-1 - |1-x|}$$

4) Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{|x^4-x^3-4|} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2-3| - |x+1|}{\sqrt{x+3} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2-x-2| - |3x-1|}{|x^2-3x-8| - 10}$$

(5) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)-2| - |f^2(x)-5f(x)| + 5}{\sqrt{f(x)+1} - 2}$

(6) Αν $g(x) > 0$ δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + x}{g(x)} \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + x - 1}{g(x)}$$

(7) Αν $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x} = 3$ βρείτε τα a, b

(8) Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2a} - \sqrt{2x+a}}{x^2 - 5x + 6} \in \mathbb{R}$ βρείτε το a

και υπολογίστε το όριο

(9) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a}{\sqrt{x+3} - b}$

(10) Υπολογίστε για τις διάφορες τιμές του λ το

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lambda x + \lambda + 5}{x^2 - 4x + 4}$$

(11) Βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a - \sqrt{x+b}}{2 - \sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}$

(12) Βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax+b} - 3}{x-3}, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{x^2 - 2ax + b}{x^2 - 9}, & x > 3 \end{cases} \quad x_0 = 3$

ή $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax-2} - \sqrt{bx}}{x^2 - x - 2}, & 2/3 \leq x < e \\ \frac{\sqrt{bx+5} - \sqrt{ax+9}}{2x - x^2}, & x > e \end{cases} \quad x_0 = 2$

Ασκήσεις στο Κριτήριο Παρεμβολής

1. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f^2(x) + g^2(x) - 2f(x) + 2g(x)] = -2$$

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$

2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \in \mathbb{R}$ και με την ιδιότητα

$$x^2 + f^2(x) \leq 4f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

i) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

ii) Βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4}{\sqrt{f(x) + 7} - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{f(x) + 2}}{\sqrt{f^2(x) - 3} - 1}$$

3. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\left| \frac{f(x) - 3x}{x - 1} \right| \leq x^2 + 1 \quad \forall x \neq 1$

Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = p \in \mathbb{R}$.
Αν ισχύει $x f(x) \leq \sqrt{3x^2 + 4x + 4} - 2 + 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 16}{\sqrt{f(x)} - 2}$$

Τριγωνομετρικά Όρια - Μνδερική × Φραγμένη

① Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega^2 x - \sqrt{\sigma\omega^2 x}}{\eta\mu^2 x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sigma\omega x}{\epsilon\phi^2 x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\eta\mu x}{1 - \sigma\omega^2 x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{2x^2 - x}$

v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{1 - x^2}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi^2 x + 5x}{x + 2x^2}$

vii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\omega x}{\pi - 2x}$

viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 6x}$

x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - \sigma\omega x}{x\eta\mu x}$

xi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$

② Βρείτε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ όταν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \eta\mu x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}, & x > 0 \\ \frac{5\eta\mu x + 3x}{3\eta\mu x + 4x}, & x < 0 \end{cases}$$

③ Υπολογίστε τα όρια

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7} - 3}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-1} \cdot \eta\mu\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(\sqrt{x+3} - 2)}{\eta\mu(x-1)}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\omega(1 - \sigma\omega x)}{x^2}$

vi)

(4) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

(5) Υπολογίστε τα όρια

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}} \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu 3x \cdot \sigma\omega \frac{1}{\eta\mu x})$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - x^2 \cdot \sigma\omega \frac{1}{x})$

(6) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}$ όταν $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$2x\eta\mu x + x^2 \leq f(x) \leq \eta\mu^2 x + 2x^2$$

(7) Δίνονται $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^2 f(x) \leq x - 1$ και

$$|x| \cdot g(x) \geq x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Βρείτε τα όρια

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - 3g(x))$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{g(x)} - f(x) \cdot g(x))$