

(3^ο)

Μάθημα 3^ο: Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$: Παράγοντοποίηση

1^ο Λυμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

Λύση

Μεθοδολογία

i) Υπολογίζουμε με αντικατάσταση τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή.

• Αν προκύψει $\frac{0}{a}$ τότε το όριο είναι μηδέν.

• Αν προκύψει $\frac{0}{0}$, θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

• Αν προκύψει $\frac{0}{0}$ σχετίζουμε όπως παρακάτω

ii) Παράγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή

iii) Απλοποιούμε τον κοινό όρο

iv) Υπολογίζουμε το όριο του ημίωπου που απομένει:

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 5x + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 9 - 9 = 0$$

Άρα έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$!!!

$$ii) x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

Αρα

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

2^ο Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x \cdot \sqrt{3+x} - \sqrt{3+x} + 3x - 3x^2}$

Λύση

Αν κάπου αντιστάσει προκύπτει $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{3+x}(x-1) + 3x(1-x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)[\sqrt{3+x} - 3x]} = \frac{1-2}{\sqrt{3+1} - 3 \cdot 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Άλλα Παράδειγματα

① Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 12x + 35}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1 - 4(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - 7x + 6}$$

2) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 - 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{2x^2 - 7x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x+2}}{\frac{3}{x} + \frac{2x^2 - 3}{x^2 + x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$$

3) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 5}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + 5}{x^2 - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{3-x}}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2 + 2x - 3} \right)$$