1. Όριο Άρρητης Συνάρτησης της μορφής $\frac{0}{0}$ με τετραγωνική ρίζα

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται οι βασικές περιπτώσεις των συζυγών παραστάσεων όταν έχουμε τετραγωνικές ρίζες.

Παράσταση	*Συζυγή Παράσταση*
$\sqrt{\alpha}-\beta$	$\sqrt{\alpha}+\beta$
$\sqrt{\alpha}+\beta$	$\sqrt{\alpha}-\beta$
$\alpha-\sqrt{\beta}$	$\alpha+\sqrt{\beta}$
$\alpha+\sqrt{\beta}$	$\alpha-\sqrt{\beta}$
$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

Μεθοδολογία

- *Αντικαθιστούμε στο όριο όπου χ το 2 και βλέπουμε ότι προκύπτει μορφή $\frac{0}{0}$. Επίσης ο αριθμητής ή ο παρανομαστής (ή και οι δύο) είναι της μορφής $\alpha \mp \sqrt{\beta}$ ή $\sqrt{\alpha}\mp\sqrt{\beta}$*
- *Για να υπολογίσουμε το όριο, πολλαπλασιάζουμε και τον αριθμητή και τον παρανομαστή με την συζυγή παράσταση του αριθμητή ή του παρανομαστή αντίστοιχα. Στην συνέχεια εκτελούμε την διαφορά τετραγώνων για να φύγουν οι τετραγωνικές ρίζες.*
- *Παραγοντοποιούμε κανονικά*
- *Αν και ο αριθμητής και ο παρανομαστής είναι της μορφής $\alpha\mp\sqrt{\beta}$ ή $\sqrt{\alpha}\mp\sqrt{\beta}$, τότε πολλαπλασιάζουμε και αριθμητή και παρανομαστή με την συζυγή παράσταση και των δύο.*

Λύση

Η συζυγή παράσταση του αριθμητή είναι η $\sqrt{x^2+5}+3$, επομένως πολλαπλασιάζουμε με αυτήν και τον αριθμητή και τον παρανομαστή.

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-2x)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{\chi\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}+3)^2-3^2}{(x^2-2x)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi^2+5-9}{(x^2-2x)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi^2-4}{(x^2-2x)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

Τώρα επιτύχαμε να φύγουν οι τετραγωνικές ρίζες, οπότε συνεχίζουμε όπως στα παραδείγματα του προηγούμενου μαθήματος, κάνοντας παραγοντοποίηση στον αριθμητή και στον παρανομαστή.

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi^2-4}{(x^2-2x)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{\chi\to 2}\frac{\cancel{(\chi-2)}\cdot(\chi+2)}{\chi\cancel{(\chi-2)}\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi+2}{\chi\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

Αντικαθιστώντας όπου χ το 2 βλέπουμε ότι έχει αρθεί η απροσδιριστία και επομένως υπολογίζουμε απλά το όριο.

$$\frac{2+2}{2\cdot(\sqrt{2^2+5}+3)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

2ο Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{5\chi-10}{\chi+1-\sqrt{\chi+7}}$$

Μεθοδολογία

Εδώ ο παρανομαστής είναι $\chi+1-\sqrt{\chi+7}$, άρα η συζυγή του παράσταση θα είναι η

$$\chi+1+\sqrt{\chi+7}$$

Λύση

Όπως και πριν πολλαπλασιάζουμε και τον αριθμητή και τον παρανομαστή με την συζυγή παράσταση του αριθμητή.

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{(5\chi-10)\cdot(\chi+1+\sqrt{\chi+7})}{(\chi+1-\sqrt{\chi+7})\cdot(\chi+1+\sqrt{\chi+7})}=\lim_{\chi\to 2}\frac{(5\chi-10)\cdot(\chi+1+\sqrt{\chi+7})}{(\chi+1)^2-\sqrt{\chi+7}^2}=\lim_{\chi\to 2}\frac{(5\chi-10)\cdot(\chi+1+\sqrt{\chi+7})}{\chi^2+2\chi+1-\chi-7}$$

$$=\lim_{\chi\to 2}\frac{(5\chi-10)\cdot(\chi+1+\sqrt{\chi+7})}{\chi^2+\chi-6}=\lim_{\chi\to 2}\frac{5(\chi-2)\cdot(\chi+1+\sqrt{\chi+7})}{(\chi-2)(\chi+3)}=\frac{5(2+1+\sqrt{9})}{2+3}=6$$

Άλυτα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to5}\frac{\chi-5}{\sqrt{\chi-1}-2}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to3}\frac{\chi-3}{\sqrt{2\chi-1}-\sqrt{\chi+2}}$

$\lim_{\chi\to2}\frac{\chi^2-9\chi+14}{2\sqrt{\chi+7}-3\sqrt{\chi+2}}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to1}\frac{\chi^3-1}{\sqrt{\chi^2+\chi+2}-2}$

$\lim_{\chi\to3}\frac{3-\sqrt{\chi+6}}{2-\sqrt{\chi+1}}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to3}\frac{\sqrt{2\chi+3}-\sqrt{3\chi}}{\sqrt{\chi+1}-2}$

$\lim_{\chi\to2}\frac{\sqrt{\chi^2+\chi+3}-3}{\sqrt{\chi^2-\chi+2}-2}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to-2}\frac{\sqrt{6+\chi}-\sqrt{8+2\chi}}{\sqrt{3-3\chi}-\sqrt{1-4\chi}}$

$\lim_{\chi\to3}\frac{\sqrt{2\chi+3}-\sqrt{3\chi}}{\sqrt{\chi+1}-2}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to4}\frac{\chi-1-\sqrt{\chi+5}}{\chi-4}$

$\lim_{\chi\to2}\frac{\sqrt{\chi+2}-\sqrt{3\chi-2}}{\sqrt{\chi-2}}$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to1}\frac{\sqrt{\chi+3}-\sqrt{5-\chi}}{\sqrt{2\chi-1}-1}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to2}\frac{\chi^2-4}{\chi-\sqrt{6-\chi}}$

$\lim_{\chi\to0}\frac{\sqrt{\chi^2+1}-1-2\chi}{\chi}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3+2\chi}-(\sqrt{2}+1)}{\chi^2-2}$

$\lim_{\chi\to0}\frac{\sqrt{\chi+4}-2}{\chi\sqrt{4\chi+16}}$ $\quad$ $\lim_{\chi\to2}\frac{\sqrt{2\chi+2}-\sqrt{3\chi}}{\sqrt{\chi+6}-2\sqrt{\chi}}$

2. Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ – Κυβικό Ριζικό

Μεθοδολογία

Όταν εμφανίζεται στον αριθμητή ή στον παρανομαστή παράσταση της μορφής $\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}$ *, τότε χρησιμοποιούμε την ταυτότητα* $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$

Συγκεκριμένα θα έχουμε :

Παράσταση	*Συζυγή Παράσταση*
$\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}$	$\sqrt[3]{f(x)}^2+\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}^2$

Επομένως πολλαπλασιάζοντας και αριθμητή και παρανομαστή με την συζυγή παράσταση θα προκύψει (στον αριθμητή ή στον παρανομαστή)

$$(\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)})\cdot(\sqrt[3]{f(x)}^2+\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}^2)=\sqrt[3]{f(x)}^3-\sqrt[3]{g(x)}^3=f(x)-g(x)$$

Αν έχουμε τέτοιες παραστάσεις και στον αριθμητή και στον παρανομαστή , τότε πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τις αντίστοιχες συζυγές παραστάσεις και του αριθμητή και του παρανομαστή.

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{x^3-4x}$$

Μεθοδολογία

Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$(\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)})\cdot(\sqrt[3]{f(x)}^2+\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}^2)=\sqrt[3]{f(x)}^3-\sqrt[3]{g(x)}^3=f(x)-g(x)$$

Λύση

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{x^3-4x}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3-x})\cdot(\sqrt[3]{x-1}^2+\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{3-x}^2)}{x(x^2-4)\cdot(\sqrt[3]{x-1}^2+\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{3-x}^2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x-1}^{3} - \sqrt[3]{3-x}^{3}}{x(x-2)(x+2)\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}^{2} + \sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{3-x}^{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-1-3+x}{x(x-2)(x+2)\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}^{2} + \sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{3-x}^{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}(x+2)\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}^{2} + \sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{3-x}^{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{2(2+2)\left(\sqrt[3]{2-1}^{2} + \sqrt[3]{2-1}\cdot\sqrt[3]{3-2} + \sqrt[3]{3-2}^{2}\right)} = \frac{1}{12}$$

Άλυτα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to 2} \frac{x^2-\chi-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$ $\lim_{\chi\to 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{11-x}-\sqrt[3]{x+5}}$ $\lim_{\chi\to 8} \frac{\chi-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\lim_{\chi\to 3} \frac{\chi-3}{\sqrt[3]{x+5}-2}$

$\lim_{\chi\to -3} \frac{x+3}{\sqrt[3]{11+x}-\sqrt[3]{5-x}}$ $\lim_{\chi\to 3} \frac{x^2-5\chi+6}{\sqrt[3]{2x+2}-\sqrt[3]{3x-1}}$ $\lim_{\chi\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1-x}-1}$ $\lim_{\chi\to -1} \frac{\sqrt[3]{2x+3}-1}{\sqrt[3]{2-6x}-2}$

$\lim_{\chi\to 2} \frac{3-\sqrt[3]{10x+7}}{2-\sqrt[3]{x^2+4}}$ $\lim_{\chi\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[3]{8+x}}$ $\lim_{\chi\to -1} \frac{\sqrt[3]{2x+3}-1}{\sqrt[3]{2-6x}-2}$ $\lim_{\chi\to 1} \frac{3\sqrt[3]{2-x}-3}{x^2-x}$

3. Όριο Άρρητης Συνάρτησης της μορφής $\frac{0}{0}$ - Ειδικές Περιπτώσεις

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{\chi \to 3^+} \frac{\chi - 3}{\sqrt{\chi + 3 - \sqrt{12\chi}}}$$

Μεθοδολογία

- *Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό: A=$|A| = \sqrt{A^2}$, όταν A>0. Έτσι δημιουργούμε ένα τετραγωνικό ριζικό.*

Λύση

Εδώ το χ τείνει στο 3 από δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι χ-3>0, επομένως $\chi - 3 = |\chi - 3| = \sqrt{(\chi - 3)^2}$. Άρα το όριο μετασχηματίζεται στο παρακάτω:

$$\lim_{\chi \to 3^+} \frac{\chi - 3}{\sqrt{\chi + 3 - \sqrt{12\chi}}}$$

$$= \lim_{\chi \to 3^+} \frac{\sqrt{(\chi - 3)^2}}{\sqrt{\chi + 3 - \sqrt{12\chi}}} = \lim_{\chi \to 3^+} \sqrt{\frac{(\chi - 3)^2}{\chi + 3 - \sqrt{12\chi}}} = \lim_{\chi \to 3^+} \sqrt{\frac{(\chi - 3)^2 \cdot (\chi + 3 + \sqrt{12\chi})}{(\chi + 3 - \sqrt{12\chi}) \cdot (\chi + 3 + \sqrt{12\chi})}}$$

$$= \lim_{\chi \to 3^+} \sqrt{\frac{(\chi - 3)^2 \cdot (\chi + 3 + \sqrt{12\chi})}{(\chi + 3)^2 - 12\chi}} = \lim_{\chi \to 3^+} \sqrt{\frac{(\chi - 3)^2 \cdot (\chi + 3 + \sqrt{12\chi})}{(\chi - 3)^2}} =$$

$$\lim_{\chi \to 3^+} \sqrt{\left(\chi + 3 + \sqrt{12\chi}\right)} = \sqrt{3 + 3 + \sqrt{36}} = 2\sqrt{3}$$

2ο Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{\chi \to 1} \frac{\chi - 1}{3\sqrt{\chi} + \sqrt{\chi + 3} - 5}$$

Μεθοδολογία

Βρίσκουμε το όριο του αντίστροφου κλάσματος, με βάση το θεώρημα

$$\text{« } \boldsymbol{A\nu\ \lim_{x \to x_0} f(x) = l\ \kappa\alpha\iota\ f(x) \neq 0, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}} \text{»}$$

Λύση

Αντιστρέφουμε το κλάσμα και το «σπάμε» σε δυο κλάσματα.

$$\frac{3\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi+3}-5}{\chi-1}=\frac{3\sqrt{\chi}-3+\sqrt{\chi+3}-2}{\chi-1}=\frac{3\sqrt{\chi}-3}{\chi-1}+\frac{\sqrt{\chi+3}-2}{\chi-1}$$

Τώρα υπολογίζουμε ξεχωριστά τα δύο όρια με χρήση των αντίστοιχων συζυγών παραστάσεων, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα και τελικά θα έχουμε:

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{3\sqrt{\chi}-3}{\chi-1}=\frac{3}{2}\quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{\chi\to 1}\frac{\sqrt{\chi+3}-2}{\chi-1}=\frac{1}{4}\quad \kappa\alpha\iota$$

Άρα $\lim_{\chi\to 1}\frac{3\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi+3}-5}{\chi-1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

Και επομένως σύμφωνα με το θεώρημα που σημειώσαμε στην μεθοδολογία θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\chi-1}{3\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi+3}-5}=\frac{4}{7}$$

Άλυτα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to 2^+}\frac{\chi-2}{\sqrt{\chi-2\cdot\sqrt{\chi-1}}}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\chi^2}}}{\chi}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 2^+}\frac{\chi-2}{\sqrt{\chi+2-\sqrt{8\chi}}}$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to 1}\frac{\sqrt{\chi}-1}{\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi+8}-4}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 1}\frac{\chi-2}{\sqrt{\chi+2}+\sqrt{2\chi}-4}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 3}\frac{\chi^2-9}{\sqrt{4\chi-3}+\sqrt{\chi+6}-2\sqrt{3\chi}}$

3ο Λυμένο Παράδειγμα : Μορφοποίηση σε διαφορά τετραγώνων και διαφορά κύβων

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\chi^2+7}-4}{\sqrt[3]{\chi+5}-2}$$

Ενότητα 2η - Μάθημα Τέταρτο: Όρια με Ρίζες

Μεθοδολογία

- *Θέτουμε τα ριζικά ως α και β και έτσι συντομεύουμε και απλοποιούμε την διαδικασία εύρεσης του ορίου.*
- *Εφαρμόζουμε συγχρόνως τις δύο προηγούμενες μεθόδους ώστε να μορφοποιηθεί διαφορά τετραγώνων και διαφορά κύβων.*

Λύση

Θέτουμε α=$\sqrt{\chi^2+7}$ και β=$\sqrt[3]{\chi+5}$, επομένως θα έχουμε:

$\alpha^2=\chi^2+7$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta^3=\chi+5$

Τώρα θα πολλαπλασιάσουμε και αριθμητή και παρανομαστή με τις δύο συζυγείς παραστάσεις ώστε να προκύψει και διαφορά τετραγώνων και διαφορά κύβων.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{\chi^2+7}-4}{\sqrt[3]{\chi+5}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{\alpha-4}{\beta-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(\alpha-4)(\alpha+4)(\beta^2+2\beta+4)}{(\beta-2)(\beta^2+2\beta+4)(\alpha+4)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\alpha^2-16)(\beta^2+2\beta+4)}{(\beta^3-8)(\alpha+4)}\overset{\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\theta\iota\sigma\tau\acute{o}\upsilon\mu\varepsilon\ \pi\acute{\alpha}\lambda\iota\ \tau\iota\varsigma\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma}{\triangleq}\lim_{x\to 3}\frac{(\chi^2+7-16)(\sqrt[3]{\chi+5}^2+2\sqrt[3]{\chi+5}+4)}{(\chi+5-8)\left(\sqrt{\chi^2+7}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\chi-3)\cancel{(\chi+3)}(\sqrt[3]{\chi+5}^2+2\sqrt[3]{\chi+5}+4)}{\cancel{(\chi-3)}\left(\sqrt{\chi^2+7}+4\right)}\overset{\acute{o}\pi o\upsilon\ \chi\ \tau o\ 3}{\triangleq}9$$

Άλυτα Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{2-\chi}}{\sqrt{\chi+3}-2}$ $\lim_{\chi\to 5}\frac{\sqrt{\chi-1}-2}{\sqrt[3]{\chi+3}-\sqrt[3]{2\chi-2}}$ $\lim_{\chi\to 4}\frac{\sqrt{\chi+5}-\sqrt{3\chi-3}}{\sqrt[3]{2\chi}-\sqrt[3]{3\chi-4}}$

$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{\chi+2}-\sqrt{3\chi-2}}{\sqrt[3]{3-\chi}-1}$ $\lim_{\chi\to 3}\frac{3-\sqrt[3]{\chi^2+4\chi+6}}{\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{3\chi}}$ $\lim_{\chi\to 3}\frac{2\chi-3-\sqrt{2\chi+3}}{\sqrt[3]{4-\chi}-1}$

$\lim_{\chi\to 4}\frac{\sqrt{2\chi+8}-\sqrt{5\chi-4}}{\sqrt[3]{\chi+4}-\sqrt[3]{3\chi-4}}$ $\lim_{\chi\to 3}\frac{\chi-\sqrt{2\chi+3}}{\sqrt[3]{\chi+5}-2}$ $\lim_{\chi\to 1}\frac{2\sqrt{\chi+8}-3\sqrt{6-2\chi}}{\sqrt[3]{3-2\chi}-\sqrt[3]{\chi}}$

4ο Λυμένο Παράδειγμα : Διαχωρισμός του κλάσματος σε άθροισμα δυο κλασμάτων

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\chi+8}-\sqrt{5-\chi}-1}{\chi^2-1}$$

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε δυο ριζικά στον αριθμητή και έναν σταθερό αριθμό λ, τότε:

- *Βρίσκουμε τα όρια κάθε ριζικού και με βάση αυτά, χωρίζουμε τον αριθμό σε δύο, έναν για κάθε ριζικό, ώστε αυτοί που θα εμφανιστούν να είναι οι αντίθετοι από τα όρια που υπολογισαμε.*
- *Χωρίζουμε το κλάσμα σε δύο ή περισσότερα κλάσματα που το καθένα περιέχει μια ρίζα και τον αντίστοιχο αριθμό.*
- *Κάθε κλάσμα είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και συνεχίζουμε όπως τα προηγούμενα παραδείγματα.*

Λύση

- Υπολογίζουμε τα δύο όρια

  $\lim_{\chi\to1}\sqrt{\chi+8}=\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3$

  $\lim_{\chi\to1}-\sqrt{5-\chi}=-\sqrt{5-1}=-\sqrt{4}=-2$

  Επομένως θα διασπάσουμε τον αριθμό -1 , που βρίσκεται στον αριθμητή, σαν άθροισμα δύο αριθμών του -3 και του +2. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\chi+8}-\sqrt{5-\chi}-1}{\chi^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\chi+8}-\sqrt{5-\chi}\mathbf{-3+2}}{\chi^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\chi+8}-3-\sqrt{5-\chi}+2}{\chi^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\chi+8}-3}{\chi^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-\chi}-2}{\chi^2-1}=$$

Τώρα θα υπολογίσουμε κατά τα γνωστά τα δυο τελευταία όρια πολλαπλασιάζοντας με τις αντίστοιχες συζυγείς παραστάσεις των αριθμητών. Τελικά θα έχουμε:

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\chi+8}-3}{\chi^2-1}=\frac{1}{12}$ *και* $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-\chi}-2}{\chi^2-1}=-\frac{1}{8}$ άρα :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\chi+8}-\sqrt{5-\chi}-1}{\chi^2-1}=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$$

Άλυτα Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{\chi-1}-\sqrt{8\chi}+3}{\chi^2-4}$ $\lim_{\chi\to 3}\frac{\sqrt[3]{\chi+5}-\sqrt{2\chi+3}+1}{\chi-3}$ $\lim_{\chi\to 3}\frac{\sqrt{2\chi+3}-2\sqrt{3\chi}+\sqrt{\chi+6}}{\chi^2-5\chi+6}$

$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{2\chi+5}+\sqrt{3\chi+3}-6}{\chi-2}$ $\lim_{\chi\to 1}\frac{\sqrt[3]{\chi}-\sqrt[3]{6-2\chi}-3}{\chi^2-1}$ $\lim_{\chi\to 4}\frac{\sqrt{3\chi-3}-2\sqrt{\chi+5}+\sqrt{2\chi+1}}{\sqrt{\chi}-2}$

5ο Λυμένο Παράδειγμα : Ριζικά διαφόρων τάξεων και τέχνασμα προσθαφαίρεσης

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{\chi^2-\chi+2}-\sqrt[3]{\chi^2-\chi+6}}{\chi-2}$$

Μεθοδολογία

- *Βρίσκουμε το όριο l ενός όρου (προσθετέου) του αριθμητή*
- *Προσθέτουμε και αφαιρούμε στον αριθμητή το όριο l*
- *Διαχωρίζουμε κατάλληλα το κλάσμα σε δύο κλάσματα*
- *Τελικά βρίσκουμε κατά τα γνωστά τα όρια των δύο κλασμάτων*

Λύση

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\chi^2-\chi+2}=\sqrt{4-2+2}=2$$

Προσθαφαιρούμε λοιπόν στον αριθμητή τον αριθμό 2 και σπάμε σε δύο όρια.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{\chi^2-\chi+2}-2-\sqrt[3]{\chi^2-\chi+6}+2}{\chi-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{\chi^2-\chi+2}-2}{\chi-2}-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{\chi^2-\chi+6}-2}{\chi-2}$$

Κάνοντας τις γνωστές διαδικασίες με τις συζυγείς παραστάσεις, βρίσκουμε τελικά:

$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{\chi^2-\chi+2}-2}{\chi-2}=\frac{3}{4}$ $και$ $\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt[3]{\chi^2-\chi+6}-2}{\chi-2}=\frac{1}{4}$, άρα το ζητούμενο όριο θα είναι ίσο με $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

6ο Λυμένο Παράδειγμα : Ριζικά με το ίδιο υπόρριζο – Αντικατάσταση με αλλαγή μεταβλητής

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3\chi+1}-\sqrt[6]{3\chi+1}}{\sqrt[3]{3\chi+1}-\sqrt[6]{3\chi+1}}$$

Μεθοδολογία

- *Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π όλων των τάξεων των ριζών, έστω ότι αυτό είναι ν.*
- *Θέτουμε $\sqrt[\nu]{g(x)}=y$ και εκφράζουμε όλα τα ριζικά ώς συνάρτηση του y*
- *Αλλάζουμε την μεταβλητή μας, προσοχή θα βρούμε όταν $\chi\to\chi_0$, που τείνει το y;*
- *Υπολογίζουμε το όριο με μεταβλητή το y (με κάποιες από τις μεθόδους που έχουμε μάθει)*

Λύση

Το *Ε.Κ.Π όλων των τάξεων των ριζών είναι το 6.*

Θέτουμε $\sqrt[6]{3\chi+1}=y$ και άρα $\sqrt{3\chi+1}=y^3$ $\kappa\alpha\iota$ $\sqrt[3]{3\chi+1}=y^2$

Προσοχή

Όταν το $\boldsymbol{\chi\to 0}$ τότε $\boldsymbol{y=\lim_{x\to\to 0}\sqrt[6]{3x+1}=1}$, άρα $\boldsymbol{y\to 1}$

Υπολογίζουμε το όριο με την καινούρια μεταβλητή y.

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^3-y}{y^2-y}=\lim_{y\to 1}\frac{\cancel{y(y-1)}(y+1)}{\cancel{y(y-1)}}=\lim_{y\to 1}y+1=2$$

Άλυτα Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{2\chi}-\sqrt{\chi+6}}{\chi-2}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt[3]{5\chi-2}-\sqrt{3\chi-2}}{\chi-2}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 3}\frac{\sqrt[3]{\chi^2+3\chi+9}-\sqrt{4\chi-3}}{\chi-3}$

$\lim_{\chi\to 1}\frac{\sqrt{\chi}-2\sqrt[3]{\chi}+1}{\sqrt[5]{\chi}-1}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 1}\frac{3\sqrt{2\chi+1}-2\sqrt[3]{2\chi+1}-1}{2\sqrt[3]{2\chi+1}-\sqrt{2\chi+1}-1}$ $\qquad$ $\lim_{\chi\to 0}\frac{3\sqrt[4]{3\chi+16}-2\sqrt{3\chi+16}+2}{5\sqrt[4]{3\chi+16}-\sqrt{3\chi+16}-6}$