Μάθημα 3γ: Όριο Κλαδωτών Συναρτήσεων

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όταν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & -3\le x<1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & x>1 \end{cases}$

Μεθοδολογία

- Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια $x\to x_0^-$ και $x\to x_0^+$
- Αν τα πλευρικά όρια είναι ίσα, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
- Αν τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο στο x_0

Λύση

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

Ομοίως ...

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{4}$

2ο Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε το α ώστε να έχει όριο στο $x_0=3$ η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} a^2x^2-ax-10 & , x<3 \\ x^2+a^2x-1 & , x>3 \end{cases}$$

Λυση

Μεθοδολογια

- Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια στην θεση x_0 που γίνεται αλλαγή τύπου.
- Εξισώνουμε τα πλευρικά όρια, οπότε έχουμε εξίσωση ως προς α (ή ως προς α και β)
- Αν από την υπόθεση έχουμε ακόμη μια σχεση μεταξύ των παραμέτρων, τοτε λύνουμε το συστημα των δύο εξισώσεων.

Θα πρεπει λοιπόν τα πλευρικά όρια να είναι ισα στην θεση $x_0=3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(a^2x^2-ax-10)=9a^2-3a-10$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2+a^2x-1)=9+3a^2-1$$

Άρα θα πρέπει $9a^2-3a-10=3a^2+8$

$\iff a=2$ και $a=-\frac{3}{2}$

Άλυτα Παραδείγματα

① Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ με $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x<2 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}, & x>2 \end{cases}$

② Βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ όταν

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x<1 \\ \sqrt{2x}-2, & 1<x<2 \\ x^3-2x-4, & x>2 \end{cases}$$

③ Βρείτε τα όρια της συνάρτησης f στην θέση x_0

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & 0<x<1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}, & x>1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<1 \\ \ln x, & x\geq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}, & x<0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x}-x}, & x>0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

iv) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-4x}{x^2-3x+2}, & x<1 \\ \dfrac{1-x^3}{\sqrt{x^2+x+2}-2}, & 1<x<2 \\ \dfrac{4\sqrt{x-1}-2x}{x+2-\sqrt{8x}}, & x>2 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$ και $x_0 = 2$

(v)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & x>1\\[2ex] \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-x}, & 0<x<1\end{cases}\qquad x_0=1$$

vi)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x-1}-1}{x-3\sqrt{x+2}+4}, & 1\le x<2\\[2ex] \dfrac{x-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}, & x>2\end{cases}\qquad x_0=2$$

~~vii)~~

(4) Βρείτε τα α,β ώστε η $f(x)$ να έχει όριο στο $x=1$ και στο $x=3$

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta x+3, & x<1\\ \beta x^2+x-\alpha, & 1<x<3\\ x^3-\beta x+5\alpha, & x>3\end{cases}$$

(5) Βρείτε τα α,β ώστε η f να έχει όριο στο $x=2$ και η C_f να διέρχεται από το $A(1,6)$

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, & x<2\\ x^2-\alpha x+2\beta, & x>2\end{cases}$$

(6) Δίνεται $f(x)$ με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x+5}-2}, & -5\le x\le -1\\[1ex] \alpha x+\alpha-7, & -1\le x\le 2\\[1ex] \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}, & x>2\end{cases}$$

α) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ δείξτε ότι $\alpha=3$

β) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$