Μάθημα 35: Τύπος Συνάρτησης με Απόλυτες Τιμές

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}$

Λύση

Μεθοδολογία

- Υπολογίζουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα.
- Αν η παράσταση που είναι μέσα στο απόλυτο, αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε παίρνουμε πλευρικά όρια
- Αν δεν αλλάζει, τότε διώχνουμε το απόλυτο σύμφωνα με το πρόσημο της παράστασης στην περιοχή του x_0.

x^2-3x+2

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

πλευρικά όρια

x^2-x

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

πλευρικά όρια

Άρα για $x<1$ $\quad |x^2-3x+2| = x^2-3x+2$

κ' $\quad |x^2-x| = -x^2+x$

ενώ για $x>1$ $\quad |x^2-3x+2| = -x^2+3x-2$

και $\quad |x^2-x| = x^2-x$

Με βάση τις προηγούμενες ισότητες, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2+x-1}{-x^2+x+x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{-(x-1)^2} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2+3x-2+x-1}{x^2-x+x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= 1$$

Επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, δεν υπάρχει το όριο στο $x=1$.

Άλυτα Παραδείγματα

(1) Βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1}-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3|x-2|-|x|-3}{x^2+2|x-3|-|x|-4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2|x-1|-3|x-5|+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$$

(2) Υπολογίστε τα όρια

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x^2-x|+x}{|x^2+x|+x}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-5}}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}$ iv) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{|x^2-4x+3|-x^2-15}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

v) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{|x^2-2x|}{\sqrt{|x^2-2x|+4}-2}$ vi) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-x|+|-x^2-2x+3|+x^3-1}{x^2-1-|1-x|}$

2º Λυμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το όριο: $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-3|-|x^2-7x+9|+4-3x}{x^2-x}$

Λύση

① Εδώ χρησιμοποιούμε το παρακάτω βασικό θεώρημα

- Αν ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0
- Αν ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

② Επίσης ισχύουν και οι παρακάτω προτάσεις

Αν $f(x)>0$ ή $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, τότε

$\lim_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ (προσοχή ≥ 0)

③ Αν οι f και g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει

$f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

④ Αν f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει

$f(x)<g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

Λύση Παραδείγματος

Μεθοδολογία

- Βρίσκουμε τα όρια των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα
- Κοντά στο x_0, το πρόσημο των παραστάσεων αυτών είναι ίδιο με το πρόσημο των ορίων τους (που έχουμε υπολογίσει)
- Διώχνουμε τα απόλυτα και συνεχίζουμε.

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-3) = -2 < 0$

Επομένως κοντά στο $x_0=1$ $\quad x-3<0$ άρα
$|x-3| = -x+3$

- $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-7x+9) = 1^2-7+9 = 3 > 0$

Επομένως κοντά στο 1 $\quad x^2-7x+9 > 0$
άρα $\quad |x^2-7x+9| = x^2-7x+9$

Διώχνουμε τα απόλυτα και υπολογίζουμε τα όρια.

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x+3-(x^2-7x+9)+4-3x}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+3x-2}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x-2)}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x-2}{x}\right) = -\frac{1-2}{1} = +1$$

Άλυτα Παραδείγματα

(1) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3x^4+2x^3-6|-|3x^5+2x^4-6|}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x^3+x^2-13|-|x^4+x^3-25|}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{|x^4-x^3-4|}-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\sqrt{|x^5-x^4-9|}-3}$$

(2) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ αν

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|+|x+2|}{4x} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \text{ αν } x=0\end{cases}$$

(3) Υπολογίστε τα όρια:

$$\lim_{x\to -2}\frac{|x^2-3|-|x+1|}{\sqrt{x+3}-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-8|-10}$$

(4) Αν $a\neq 0$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1-a^2|-|x-1+a^2|}{\sqrt{x}-1}$

3º Λυμένο Παράδειγμα

Έστω $f: \mathbb{R} \to (-1, +\infty)$ με $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

Υπολογίστε το $\lim_{x \to 2} \dfrac{|f(x)-2| - |f^2(x) - 5f(x)| + 5}{\sqrt{f(x)+1} - 2}$

Λύση

Εφ' όσον $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ τότε κοντά στο $x_0 = 2$

$f(x) > 0$

Επίσης $\lim_{x \to 2} (f(x) - 2) = 3 - 2 = 1 > 0$

άρα $|f(x) - 2| = f(x) - 2$ κοντά στο $x_0 = 2$

Ομοίως

$\lim_{x \to 2} (f^2(x) - 5f(x)) = 3^2 - 5 \cdot 3 = -6 < 0$

άρα κοντά στο x_0, $f^2(x) - 5f(x) < 0$

άρα $|f^2(x) - 5f(x)| = 5f(x) - f^2(x)$

Επομένως το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 2 + f^2(x) - 5f(x) + 5}{\sqrt{f(x)+1} - 2}$$

$= \ldots\ldots = 8$

4º Λυμένο Παράδειγμα

Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} [f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) \cdot g(x)] \geq 4 \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$$

Λύση

Μεθοδολογία

Εδώ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

Αν $f(x) > 0$ τότε κοντά στο x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$.

Για να το εφαρμόσουμε τα πάμε όλα στο πρώτο μέλος.

Λύση

$$\lim_{x \to x_0} \left[f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) \cdot g(x) - 4f(x) \cdot g(x) \right] \geq 0$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \left[(f(x) - g(x)) \right]^2 \geq 0$$

Έστω $h(x) = (f(x) - g(x))^2 \geq 0$

Άρα αφού $h(x) \geq 0$ τότε κοντά στο x_0 θα έχουμε: $\lim_{x \to x_0} h(x) \geq 0$.

Άρα $\lim_{x \to x_0} [(f(x) - g(x))]^2 \geq 0$ (αποδείχτηκε)

Άλυτα Παραδείγματα

1. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f^2(x)+g^2(x)\right] \geq \lim_{x\to x_0}\left[2f(x)-1\right]$$

2. Αν $g(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{3x^2+x}{g(x)} \geq \lim_{x\to x_0}\frac{2x^2+x-1}{g(x)}$$

3. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου η γραφική παράσταση διέρχεται από το $A(1,3)$

Υπολογίστε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2P(x)-2|-|x^2-P(x)|+|x-2|}{x^2-3x+2}$$