Μάθημα 35: Κριτήριο Παρεμβολής + Ανισώσεις

Εστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν ισχύουν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

, τοτε ισχύει και $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

1ο Λυμενο Παράδειγμα

Δίνεται $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $2x\sqrt{x} \leq f(x) \leq x^2 + x$ $\forall x > 0$.

Βρείτε τα $\lim_{x \to 1} f(x)$ και $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$

Μεθοδολογία

- Εφ' οσον εχουμε ανισωση της μορφής $A(x) \leq B(x) \leq \Gamma(x)$, εφαρμόζουμε άμεσα το κριτήριο παρεμβολής
- Για το 2ο όριο, μορφοποιούμε την παράσταση και παίρνουμε πλευρικά όρια

i) Εχουμε $2x\sqrt{x} \leq f(x) \leq x^2 + x$. Όμως

$\lim_{x \to 1} 2x\sqrt{x} = 2$ και $\lim_{x \to 1} (x^2 + x) = 2$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

ii) $2x\sqrt{x} \le f(x) \le x^2+x$

$\iff 2x\sqrt{x}-2 \le f(x)-2 \le x^2+x-2$

Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με $x-1$ για αυτό παίρνουμε περιπτώσεις και πλευρικά όρια.

Αν $x>1$ τότε:

$$\frac{2x\sqrt{x}-2}{x-1} \le \frac{f(x)-2}{x-1} \le \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

Κατά τα γνωστά: $g(x)=\frac{f(x)-2}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x\sqrt{x}-2}{x-1} = \ldots\ldots = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \ldots = 3$$

Άρα $\lim_{x\to 1^+} g(x)=3$

Αν $x<1$ τοτε:

$$\frac{2x\sqrt{x}-2}{x-1} \geq g(x) \geq \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

Ομοίως

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x\sqrt{x}-2}{x-1} = \ldots = 3 = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

Άρα $\lim_{x\to 1^+} g(x) = 3$

Επομενως $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$

Άλλα Παραδείγματα

(1) Αν $4\sqrt{x} \le f(x) \le x+4$ βρείτε:

i) $\lim_{x\to 4} f(x)$ ii) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-8}{x-4}$ iii) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-8}{\sqrt{x+5}-3}$

iv) $\lim_{x\to 4} \frac{f^2(x)-64}{x-4}$ v) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{f(x)+1}-3}{x-4}$

vi) $\lim_{x\to 4} \frac{|f(x)-5|-3}{x^2-5x+4}$

(2) Αν $9-3x \le f(x)-2x^2 \le x^2-5x+10 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-8}{x-1}$ γ) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{f(x)}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$

δ) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{f(x)-4}-2}{\sqrt{f(x)+8}-4}$

ε) $\lim_{x\to 1} \frac{3|f(x)-5|-9}{x^3-1}$

στ) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-8}{\sqrt{x^2+3}-2}$

(3) Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $9x^2-90 \le (x-3)f(x)-9 \le x^4-9x^2-9$
$\forall x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το $\lim_{x\to 3} f(x)$

(4) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$12\sqrt{x+3} - 22 \leq f(x) \leq x^2 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$

2º Λυμένο Παράδειγμα

Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Επίσης ισχύει: $x f(x) + 3 \leq 2 f(x) + \sqrt{x^2+5} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Λύση

$$x\cdot f(x) + 3 \leq 2 f(x) + \sqrt{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2) f(x) \leq \sqrt{x^2+5} - 3$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

Αν $x-2>0$ τότε $f(x) \leq \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

Όμως $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \ldots\ldots = \dfrac{2}{3}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \leq \dfrac{2}{3}$

Αν $x-2<0$ τότε $f(x) \geq \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

Όμως $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \ldots = \dfrac{2}{3}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{2}{3} = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{2}{3}$

Άλυτα Παραδείγματα

① Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x f(x) \le x^2 + 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \in \mathbb{R}$

i) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

ii) Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^2(x) - 3f(x) - 1 + |f(x) - 4|}{\sqrt{f(x)+1} - 2}$$

② Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Επίσης ισχύει: $x f(x) \le \sqrt{3x^2+4x+4} - 2 + 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f^2(x) - 16}{\sqrt{f(x)} - 2}$$

3º Λυμένο Παράδειγμα : $|f(x)| \le g(x)$

Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\left| \dfrac{f(x)-3x}{x-1} \right| \le x^2+1 \quad \forall x \neq 1$

Βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Λύση

Μεθοδολογία

Μια ανίσωση της μορφής $|A(x)| \le B(x)$ γράφεται

$$-B(x) \le A(x) \le B(x)$$

άρα εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής

Λυση

$$|f(x) - 3x| \le |x-1| \cdot (x^2+1) \iff$$

$$-|x-1|(x^2+1) \le f(x) - 3x \le |x-1|(x^2+1) \iff$$

$$-|x-1|(x^2+1) + 3x \le f(x) \le |x-1|(x^2+1) + 3x$$

Όμως $\lim\limits_{x \to 1}\left(-|x-1|(x^2+1) + 3x\right) = -0 \cdot 2 + 3 = 3$

και $\lim\limits_{x \to 1}\left(|x-1|(x^2+1) + 3x\right) = 0 \cdot 2 + 3 = 3$

Άρα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ από το κριτήριο παρεμβολής

4ο Λυμένο Παράδειγμα: Κριτήριο Παρεμβολής - Θεωρητικά Παραδείγματα

Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) - 6f(x) \leq x - 9$ τότε δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 3$

Λύση

Έχουμε:

$$f^2(x) - 6f(x) + 9 \leq x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (f(x) - 3)^2 \leq x$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} 0 = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, έπεται ότι

$$\lim_{x \to 0} (f(x) - 3)^2 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) - 3) = 0$ και επομένως

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$$

Προσοχή

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Όμως αν $\lim\limits_{x \to x_0} f^2(x) = 9$ δεν έπεται ότι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm 3$$