Μάθημα 3ε: Βοηθητική Συνάρτηση.

1º Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)f(x)-x^2+1}{1-\sqrt{x}} = 10$$

Λύση

Μεθοδολογία

1. Θέτουμε $h(x)$ την παράσταση του γνωστού ορίου.
2. Λύνουμε την ισότητα ως προς $f(x)$
3. Βρίσκουμε κανονικά το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

4. Αν έχουμε δύο παραστάσεις με $f(x)$ και $g(x)$ τις θέτουμε $h(x)$ και $\varphi(x)$ αντίστοιχα και λύνουμε ως προς $f(x)$ και $g(x)$. (Λύνοντας σύστημα)

Προσοχή, δεν γνωρίζουμε ότι η f έχει όριο στο $x=1$ οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα "όριο πηλίκου"

Θέτουμε $h(x) = \dfrac{(1-x)f(x)-x^2+1}{1-\sqrt{x}}$ άρα $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 10$

$$\Leftrightarrow (1-x)f(x) = (1-\sqrt{x})\,h(x) + x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(1-\sqrt{x})\,h(x) + x^2-1}{1-x} \quad \text{(κοντά στο 1)}$$

$$= \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\,h(x) + \frac{x^2-1}{1-x}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot \lim\limits_{x\to 1} h(x) + \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{1-x}$

$= \frac{1}{2} \cdot 10 - 2 = 3.$

Άλυτα Παραδείγματα

(1) Βρείτε το $\lim_{x \to 4} f(x)$ και $\lim_{x \to 4} g(x)$ αν

$$\lim_{x \to 4} \left[2\sqrt{x}\, f(x) - x g(x) \right] = -4$$

και $\lim_{x \to 4} \left[x f(x) - \sqrt{x+5} \cdot g(x) \right] = 2$

(2) Βρείτε το $\lim_{x \to 1} f(x)$ όταν

α) $\lim_{x \to 1} \dfrac{5f(x) - 2}{2f(x) - 3} = 2$

β) $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x^2-1) f(x) - \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1} = \dfrac{1}{3}$

γ) $\lim_{x \to 1} \left[x f(x) - \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1} \right] = 8$

(3) Βρείτε το $\lim_{x \to 4} f(x)$ όταν

i) $\lim_{x \to 4} \left[(\sqrt{x} + 1) f(x) - \dfrac{x-4}{\sqrt{x-3} - 1} \right] = 8$

ii) $\lim_{x \to 4} \left[(6-x) f(x) - \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2} \right] = 6$