

Μαθημα 3οη: Τριγωνομετρικά Όρια

Εδώ ισχύουν οι παρακάτω σημαντικές σχέσεις

$$i) |n\mu x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow x_0} n\mu x = n\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\omega x = \sigma\omega x_0$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\mu x}{x} = 1$$

$$iv) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{n\mu u}{u} = 1$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega x - 1}{x} = 0$$

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sigma\omega^2 x + \sigma\omega x}{n\mu^2 x}$

Λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sigma\omega x (\sigma\omega x + 1)}{1 - \sigma\omega^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sigma\omega x (\sigma\omega x + 1)}{(1 - \sigma\omega x)(1 + \sigma\omega x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sigma\omega x}{1 - \sigma\omega x} \\ &= \frac{-1}{1 - (-1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2^ο Λυμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega^2 x - \sqrt{\sigma\omega^2 x}}{\eta\mu^2 x}$

Λύση

$$(*) \quad \sigma\omega^2 x = \sigma\omega^2 x - \eta\mu^2 x \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma\omega^2 x - \sqrt{\sigma\omega^2 x})(\sigma\omega^2 x + \sqrt{\sigma\omega^2 x})}{\eta\mu^2 x (\sigma\omega^2 x + \sqrt{\sigma\omega^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega^4 x - \sigma\omega^2 x}{\eta\mu^2 x (\sigma\omega^2 x + \sqrt{\sigma\omega^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega^4 x - \sigma\omega^2 x + \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x (\sigma\omega^2 x + \sqrt{\sigma\omega^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega^2 x (\sigma\omega^2 x - 1) + \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x (\sigma\omega^2 x + \sqrt{\sigma\omega^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sigma\omega^2 x \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x (\sigma\omega^2 x + \sqrt{\sigma\omega^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x (1 - \sigma\omega^2 x)}{\eta\mu^2 x (\sigma\omega^2 x + \sqrt{\sigma\omega^2 x})}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

Άλλα Παραδείγματα

① Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\omega x - \eta\mu x}{\sigma\omega 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\omega x}{\eta\mu x + \sigma\omega x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega x - \sqrt{\sigma\omega 2x}}{\eta\mu^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2 x + 4\sigma\omega x}{\eta\mu^2 x + \sigma\omega x}$$

② Υπολογίστε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\omega^2 x}{\eta\mu^2 x - \eta\mu x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\omega^2 x - 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sigma\omega x}{\epsilon\varphi^2 x}$

~~δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega x}{\eta\mu x}$~~

ε) ~~$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi x}{x}$~~ ζ) \lim