

Μάθημα 3η: $\frac{\eta\mu x}{x}$ - Κριτήριο Παρεμβολής

1^ο Λυμένο Παράδειγμα

Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sigma\omega 2x - 1 \leq f(x) - \eta\mu x \leq 1 - \sigma\omega 2x$
βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Λύση

Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\eta\mu x - (1 - \sigma\omega 2x) \leq f(x) \leq \eta\mu x + (1 - \sigma\omega 2x)$$

$$\eta\mu x - 2\eta\mu^2 x \leq f(x) \leq \eta\mu x + 2\eta\mu^2 x$$

• Αν $x > 0$ τότε:

$$\frac{\eta\mu x}{x} - 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} + 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x$$

$$\text{Όπως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right)$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Όμοια αν $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x}{x} - 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{\eta\mu x}{x} + 2 \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Άλλα Παραδείγματα

(1) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x + nx \leq f(x) \leq 2x$
να βρεθούν τα όρια

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{nx}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{nx}$

2) Αν $|f(x) - nx| \leq 1 - \sin 2x$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

3) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^3 - 1 \leq f(x) \leq 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{nx}$

4) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x \cdot nx \cdot f(x)| \leq \sqrt{x^4 + 4} - 2$

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5) Αν $|x f(x) - nx^2| \leq |x \cdot nx| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

6) βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{nx^2}$ όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει $2x \cdot nx + x^2 \leq f(x) \leq nx^2 + 2x^2$