

## Μαθημα 3i: Μηδενική x Φραγμένη

Έστω ότι έχουμε ένα όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$

με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $|g(x)| \leq M$  με  $M > 0$

σημειώνεται  $f \rightarrow$  μηδενική συνάρτηση  
 $g \rightarrow$  φραγμένη συνάρτηση.

Τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$  σημειώνεται

"Μηδενική x Φραγμένη" = 0

### Απόδειξη

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| |g(x)| \leq |f(x)| \cdot M$$

$$\text{Άρα} \quad -|f(x)| \cdot M \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot |f(x)|$$

$$\text{Ομως αφού} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

$$\text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)| \cdot M) = \lim_{x \rightarrow x_0} (|f(x)| \cdot M) = 0$$

Από κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

## 1<sup>ο</sup> Λογμένο Παράδειγμα

Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+x) = 0 \quad \text{και} \quad |\eta\mu \frac{1}{x}| \leq 1$$

Επομένως:

$$|(x^2+x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}| \leq |x^2+x|$$

$$\Leftrightarrow -|x^2+x| \leq (x^2+x) (\eta\mu \frac{1}{x}) \leq |x^2+x|$$

$$\text{Ομως} \quad \lim_{x \rightarrow 0} -|x^2+x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2+x| = 0$$

$$\text{Άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = 0$$

## Άλυτα Παράδειγματα

① Βρείτε τα όρια

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\omega 3x - \sigma\omega x}{\eta\mu x - \eta\mu 3x} \cdot \eta\mu \left( \frac{1}{\eta\mu x} \right)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \eta\mu 3x \cdot \sigma\omega \left( \frac{1}{\eta\mu x} \right) \right]$

ε)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - x^2 \cdot \sigma\omega \frac{1}{x} \right]$