Μάθημα 2ο: Όρια της μορφής $\frac{1}{0}$ και $\frac{\alpha}{0}$

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Να βρείτε, αν υπάρχουν τα όρια

i) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ ii) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{|x+3|}$ iii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}$ iv) $\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}$

Λύση

Μεθοδολογία

- Όταν έχουμε την μορφή $\frac{1}{0}$, τότε πρέπει να υπολογίσουμε το πρόσημο του παρανομαστή.

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0,

τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0,

τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$

- Αν ο παρανομαστής αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά από το x_0, τότε παίρνουμε πλευρικά όρια.

- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty \quad \forall\, \nu\in\mathbb{N}^*$

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty \quad \forall\, \nu\in\mathbb{N}$

άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}$

Λύση

i) Παίρνουμε το όριο του παρανομαστή.

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ κοντά στο x_0

Επομένως $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

ii) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{|x+3|}$

$\lim_{x\to -3} |x+3| = 0$ και $|x+3| > 0$ κοντά στο -3.

Άρα $\lim_{x\to -3} \frac{1}{|x+3|} = +\infty$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$

$\lim_{x\to 0} (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$ κοντά στο 0.

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x - 1} = -\infty$

iv) $\lim_{x\to 4} (x-4) = 0$

Όμως για το πρόσημο του $x-4$, έχουμε:

$$\begin{array}{c|c} & 4 \\ \hline - & + \end{array}$$

Αν $x<4$ τότε $x-4<0$

Άρα $\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty$

Αν $x>4$ τότε $x-4>0$, άρα

$\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty$

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \to 4} \frac{1}{x-4}$

2º Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \to 3} \frac{x-5}{x^3-6x^2+9x}$

Λύση

Μεθοδολογία

Χρειαζόμαστε τις παρακάτω ισότητες

- $\alpha + (+\infty) = +\infty$
- $\alpha + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (+\infty) = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$

- $(+\infty) + (-\infty) =$ απροσδιοριστία

- $-\infty + (+\infty) =$ απροσδιοριστία

$\alpha > 0$

- $\alpha \cdot (+\infty) = +\infty$
- $\alpha \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\alpha < 0$

$\alpha \cdot (+\infty) = -\infty$

$\alpha \cdot (-\infty) = +\infty$

- $0 \cdot (+\infty) =$ απροσδιοριστία
- $0 \cdot (-\infty) =$ απροσδιοριστία

- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ και $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
- $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Λυση

Για να υπολογίσουμε ένα όριο της μορφής $\frac{a}{0}$ εργαζόμαστε ως εξής

- Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και ξεχωρίζουμε σε διαφορετικό κλάσμα τον παράγοντα που μηδενίζει τον παρονομαστή
- Αν αυτός ο παράγοντας διατηρεί σταθερό πρόσημο δεξιά και αριστερά του x_0, τότε το όριο θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$
- Αν δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε παίρνουμε πλευρικά όρια (με την βοήθεια του πινακα προσήμων)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-5}{x^3-6x^2+9x} \quad \left(\text{βγαίνει στην μορφή } \frac{-2}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-5}{x(x-3)^2} = \lim_{x\to 3}\left[\frac{x-5}{x}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\right]$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά.

- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-5}{x} = -\frac{2}{3}$

- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)^2 = 0$ και $(x-3)^2 > 0$ κοντά στο x_0.

Άρα $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-5}{x^3-6x^2+9x} = -\frac{2}{3}\cdot(+\infty) = -\infty$

3º Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $L = \lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x-2}}{x-2}$

Λύση

Εδώ πρώτα πολ/με με την συζυγή παράσταση και στην συνέχεια χωρίζουμε τα κλάσματα.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}}$$

- $\lim_{x \to 2} (x+1) = 3$
- Επειδή $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2} > 0$ κοντά στο 2 και

$\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}\right) = 0$, έπεται ότι

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}} = +\infty$$

Επομένως $L = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$

Άλυτα Παραδείγματα

1 Να υπολογιστούν τα όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x^3-3x^2+4}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-5}{x^3-3x+2}$

β) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2-2}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2-5x}{\sqrt{x^3-4x^2+4x}}$

ε) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-3}{\sqrt{6x-x^2}-3}$

στ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4+x}}{|x|\cdot ημx}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{x-1}$

2 Να υπολογιστούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-6}{x^2-x-2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-7}{|x-2|}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-1}{x^3-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to π/2} \dfrac{2x-3}{συνx}$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+2}{ημx}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x^3+1}-1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{(\sqrt{x}-2)^3}$

viii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+ημx}-2}{x^3}$

ix) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx}{x^3}$

x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-συνx}{x^4}$

xi) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x+3}{x^3+2x^2} + ημ\dfrac{1}{x}\right)$

xii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2συν\frac{1}{x}-3}{x^2-2|x|}$

xiii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2|x-1|+x^2-x}{x^2-2x+1}$

xiv) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

xv) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)^2 \cdot \eta\mu(\pi x)}$

xvi) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\right)\cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2}}$

③ Να υπολογιστούν τα όρια

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\eta\mu^2 x}{\eta\mu 2x - 2x}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+|x|}{|x+1|-2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x+1}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{(x-1)^5}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x + x + 1}{\eta\mu x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-5}{x-6\sqrt{x}+9}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} \left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)^2\right]$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\ln x}{(e^{x-1}-1)(1-x)}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x^2-9}$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-7}{(x+2)^{2004}}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x}{(x-1)^{2007}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^2-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$