Μάθημα 3ο: Προσδιορισμός Παραμέτρων

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε το α αν $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+2a} - \sqrt{2x+a}}{x^2-5x+6} \in \mathbb{R}$

Στην συνέχεια υπολογίστε το όριο.

Λύση

Επειδή $\lim_{x\to 3} (x^2-5x+6) = 0$, τότε αν το όριο του αριθμητή είναι διάφορο του μηδενός, τοτε το όριο της συνάρτησης θα ήταν $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν θα υπήρχε (διαφορετικά πλευρικά όρια)

Άρα για να είναι το όριο πραγματικός αριθμός θα πρέπει:

$\lim_{x\to 3} (\sqrt{x+2a} - \sqrt{2x+a}) = 0 \iff \sqrt{3+2a} - \sqrt{6+a} = 0$

$\iff \dots \iff a = 3.$

Για $a=3$, έχουμε

$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}}{(x-2)(x-3)} = \underset{(\text{συζυγή})}{\dots\dots} = \lim_{x\to 3} \frac{-(+x-3)}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3})}$

$= -\frac{1}{6}$

2º Λυμένο Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x-a}{\sqrt{x+3}-\beta}$

<u>Λύση</u>

Έχουμε: $\lim_{x\to 1}(x-a) = 1-a$ και $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}-\beta) = 2-\beta$

Άρα έχουμε τις εξής περιπτώσεις

- $1-\alpha=0$ και $2-\beta=0 \iff \alpha=1$ και $\beta=2$

Τότε το όριο παίρνει την μορφή

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 4$$

- $a\neq 1$ και $\beta\neq 2$

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{x-a}{\sqrt{x+3}-\beta} = \frac{1-a}{2-\beta}$$

- $\alpha=1$ και $\beta\neq 2$

Τότε $\lambda = \frac{0}{2-\beta} = 0$ αφού $\beta\neq 2$

- $\alpha\neq 1$ και $\beta=2$

Τότε $\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{x-a}{\sqrt{x+3}-2}$

Όμως $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}-2) = 0$ και για το πρόσημο

του έχουμε:

$$\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline - & + \end{array}$$

Επομένως:

Αν $\alpha<1$ τοτε $1-\alpha>0$ άρα

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\alpha}{\sqrt{x+3}-2}=(1-\alpha)\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\alpha}{\sqrt{x+3}-2}=(1-\alpha)(+\infty)=+\infty$$

επομένως δεν υπάρχει το όριο.

Ομοιως και οταν $\alpha>1$.

3º Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\lambda x+\lambda+5}{x^2-4x+4}$$

<u>Λυση</u>

$$L=\lim_{x\to 2}\left[(x^2+\lambda x+\lambda+5)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right]$$

Ομως $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

και $\lim_{x\to 2}(x^2+\lambda x+\lambda+5)=3\lambda+9$

Επομενως

- Αν $3\lambda+9>0$ τοτε $L=+\infty$
- Αν $3\lambda+9<0$ τοτε $L=-\infty$
- Αν $3\lambda+9=0 \Leftrightarrow \lambda=-3$ τοτε εχουμε απροσδιοριστία $0\cdot(+\infty)$

Αν αντικαταστήσουμε $\lambda=-3$ στο όριο, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2}$$ ($\frac{1}{0}$ με $x-2$ όχι σταθερό πρόσημο)

Όμως $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και

x		2	
$x-2$	$-$		$+$

άρα $\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{x-2}=-\infty$ ενώ

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{x-2}=+\infty$$

Άρα αν $\lambda=-3$ το όριο δεν υπάρχει.

Άλυτα Παραδείγματα

(1) Αν $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-5}{x^2+\lambda x-\lambda+3} = -\infty$ βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$

(2) Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to 1} \frac{\alpha-\sqrt{\beta x+1}}{\sqrt{x+3}-2} = -3$$

(3) Βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim \dfrac{\sqrt{x^2+2x+8}-2\alpha}{x^2-5x+6}\in\mathbb{R}$

Στην συνέχεια υπολογίστε το όριο

(4) Βρείτε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\alpha x+2\alpha-1}{x^2-2x+1}$

β) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-(2\alpha+1)x+3\alpha}{(x-2)^2}$

(5) Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε

i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\alpha-\sqrt{x+6}}{2-\sqrt{x+1}} = \dfrac{2}{3}$

ii) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\alpha x^2+5x+2\beta}{x^2+3x+2} = 3$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-\alpha-\beta(x-1)}{(x-1)^2} = 6$