Γ. Καθορισμός από τύπο εκθετικής, λογαριθμικής

Μεθοδολογία

Δεν αλλάζει κάτι από τα βήματα που ακολουθούσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα.

Απλά στην εξίσωση $f(x)=y$ μπορεί να χρειαστεί να θέσουμε $w=a^x$.

Επίσης στην περίπτωση της λογαριθμικής μορφοποιού- με την σχέση στη μορφή $y=\ln(h(x))$ άρα

$$e^y=h(x)$$

Λυμένα Παραδείγματα

1ο) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{e^{2x}+2}{2e^x+1}$

Πεδίο Ορισμού $= A=\mathbb{R}$ γιατί $2e^x+1\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$y=\frac{e^{2x}+2}{2e^x+1}$$

Προσοχή 1ος περιορισμός $y>0$ ($y\neq 0$ γιατί $e^{2x}+2\neq 0$)

$$(2e^x+1)y=e^{2x}+2 \iff e^{2x}-2ye^x+2-y=0$$

Θέτω $w=e^x>0$ άρα

$$w^2-2yw+2-y=0 \quad (1)$$

Κατά τα γνωστά θα πρέπει:

$\Delta\geq 0$ και w_1 ή $w_2\in A$

• $\Delta \geq 0$ •

$4y^2 - 4(2-y) \geq 0$

$4(y^2+y-2) \geq 0$

Γραφική λύση:

	-2		1	
$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$

Άρα $y \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ (2ος περιορισμός)

• w_1 ή $w_2 \in A$ •

$w_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = y + \sqrt{y^2+y-2} \\ w_2 = y - \sqrt{y^2+y-2} \end{cases}$

Επειδή $A = \mathbb{R}$ δεν έχουμε άλλο περιορισμό

Προσοχή: Όταν θέτουμε $w = e^x$, έχουμε περιορισμό για το w δηλαδή περιορισμό για το y.

Άρα (3ος περιορισμός) w_1, ή $w_2 > 0$

$w > 0 \Leftrightarrow y \pm \sqrt{y^2+y-2} > 0$

Όμως $y + \sqrt{y^2+y-2} > 0$ αφού $y > 0$ άρα καλυπτόμαστε και δεν έχουμε τελικά 3ο περιορισμό, αφού $w_1 > 0$

Τελικά $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y \leq -2 \text{ ή } y \geq 1 \end{array}\right\} y \geq 1$

Άρα $f(A) = [1, +\infty)$

2º Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = 1 + \ln(x-2)$

Πεδίο Ορισμού

$x - 2 > 0$ Άρα $A_f = (2, +\infty)$

Θα πρέπει η εξίσωση $y = f(x)$ να έχει μία τουλάχιστον λύση το πεδίο ορισμού της f, επομένως

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + \ln(x-2) \\ x > 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 1 = \ln(x-2) \\ x > 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{y-1} = x - 2 \\ x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 + e^{y-1} \\ x > 2 \end{array}\right.$$

Άρα έχουμε τον περιορισμό:

$$2 + e^{y-1} > 2$$

$$\Leftrightarrow e^{y-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \quad (\text{γιατί } e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$$

Άρα $f(A) = \mathbb{R}$

Άλυτα Παραδείγματα

Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων

$f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

$g(x) = \dfrac{e^x}{2-e^x}$

$h(x) = 2 - |x-2|$

$K(x) = 2 + e^x$

$\Lambda(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{x-1}\right)$

$M(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x}\right)$

$T(x) = \ln(1+e^x) - x$

$P(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$M(x) = 4^x - 2^{x+1} + 3$

$W(x) = \ln(x^2+1)$

Δ. Εύρεση Συνόλου Τιμών σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου.

Μεθοδολογία

1. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών για κάθε τύπο χωριστά στο αντίστοιχο διάστημα ορισμού του

2. Παίρνουμε την ένωση των παραπάνω συνόλων τιμών και έχουμε τελικά το $f(A)$.

Λυμένο Παράδειγμα

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+4 & , \ -2\le x\le 1 \\ x-4 & , \ x>1 \end{cases}$$

$A_f=[-2,\infty)$

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών για κάθε τύπο χωριστά

$-2\le x\le 1$:

$f(x)=y \iff y=x^2+2x-4 \iff -x^2+2x-4-y=0$

Θα πρέπει $\Delta\geq 0$ και x_1 ή $x_2\in[-2,1]$

Αντίστοιχα έχουμε:

$\Delta\geq 0$

$4+4(4+y)\geq 0 \iff y\geq -5$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{y+5}$

άρα $-2\le -1+\sqrt{y+5}\le 1 \iff -1\le\sqrt{y+5}\le 2$

$\iff y+5\le 4 \iff y\le -3$

Τελικά $y \geq -5$ και $y \leq -3$

άρα $-5 \leq y \leq -3$ (1)

$\underline{x > 1}$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ y + 4 > 1 \end{cases}$$

Άρα $y > -3$ (2)

Ενώνουμε τα διαστήματα που προκύπτουν από τις (1), (2) και έχουμε:

$$f(A) = [-5, +\infty)$$

Άλυτα Παραδείγματα

Να βρεθούν τα σύνολα τιμών της $f(x)$

i) $f(x) = 2|x-1| - |3-x| + 2x + 5$

ii) $f(x) = |x-6| + 2x - 6$ με $A = [1, +\infty)$

iii) $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & , x \leq -2 \\ x - 1 & , x > -2 \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x \leq 0 \\ x - 3 & , x > 1 \end{cases}$

v) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} & , 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & , x > 2 \end{cases}$

vi) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 3 & , 2 \leq x < 3 \\ 3x - 5 & , 3 \leq x < 7 \end{cases}$

No. Date

Ε. Γνωστό Σύνολο Τιμών

Λυμένο Παράδειγμα

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 1}{x^2+1}$ να έχει σύνολο τιμών το $[-1, 3]$

Μεθοδολογία

1. Θέτουμε στον τύπο όπου $f(x)$ το y
2. Εκτελούμε πράξεις με σκοπό να λύσουμε ως προς x, ή να προκύψει πολυώνυμο ως προς x
3. Λύνουμε το σύστημα των περιορισμών που προκύπτουν.

$A = \mathbb{R}$ γιατί $x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 1}{x^2+1} \iff \dots \iff (y-\alpha)x^2 - \beta x + (y-1) = 0$$

Προσοχή: Έχουμε δευτεροβάθμιο πολυώνυμο ως προς x με παράμετρο στην θέση α (συντελεστής x^2)

Αν $y = \alpha$

Τότε έχουμε:

$$-\beta x + \alpha - 1 = 0 \iff \beta x = \alpha - 1$$

- Αν $\beta = 0$ τότε $\alpha = 1$ άρα $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$ άρα $f(A) = \{1\}$ άτοπο

Άρα $\beta \neq 0$ οπότε

$$x = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

No. Date

Αφού η τιμή $x=\frac{\alpha-1}{\beta} \in A$ τότε και η $y=\alpha$

θα ανήκει στο $f(A)$ αφού $f\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)=\alpha$

Αν $y\neq\alpha$

Τότε έχουμε δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, άρα θα πρέπει

$\Delta\geq0$ και x_1 ή $x_2 \in \mathbb{R}$ (ισχύει)

$\Delta\geq0 \iff \dots \iff -4y^2+4(\alpha+1)\cdot y+\beta^2-4\alpha\geq0$ (1)

Έχουμε όμως από υπόθεση ότι $-1\leq y\leq 3$ (2)

* Αν η διακρίνουσα της (1) ήταν αρνητική ή μηδέν τότε δεν μπορεί να ισχύει η (2)

Άρα η διακρίνουσα της (1) (έστω Δ_1)

θα πρέπει να είναι θετική. Επομένως

$\Delta_1>0$

Επίσης θα πρέπει να έχει ρίζες το -1 και το 3, έστω $\rho_1=-1$ και $\rho_2=+3$

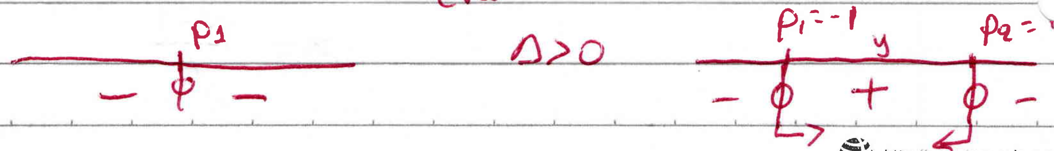
Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$\rho_1+\rho_2=+2=-\frac{\beta}{\alpha} \iff \alpha+1=2 \iff \alpha=1$

$\rho_1\cdot\rho_2=-3 \iff \frac{\beta^2-4\alpha}{-4}=-3 \iff \beta=\pm4$

* Γραφικά

$\Delta\leq0$ Ενώ $\Delta>0$



Άλυτα Παραδείγματα

① Βρείτε τα $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $f(A) = [-2, 2]$

με $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\lambda x + \kappa}{x^2 + x + 1}$

② Ομοίως με $f(x) = \dfrac{2x + \lambda}{2x^2 - 4x + \lambda}$ και $f(A) = \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$

③ Ομοίως $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + 3\beta x + 3}{x^2 - x + 1}$, $f(A) = [-3, 5]$

④ Ομοίως $f(x) = \dfrac{\lambda x}{2x^2 + 2}$, $f(A) = [-1, 1]$

⑤ Ομοίως $f(x) = \log(x^2 + \kappa)$, $\kappa > 0$, $f(A) = [1, +\infty)$

⑥ Ομοίως $f(x) = \dfrac{x^2 + \kappa}{x^2 + \lambda x + 1}$, $f(A) = [-1, 1]$

⑦ Ομοίως $f(x) = \dfrac{e^x - \kappa}{e^x + \lambda}$, $\lambda > 0$, $\kappa - \lambda = 1$, $f(A) = (-2, 1)$