5. Συνδυαστικά Θέματα στην Σύνθεση

1ο Λυμένο Παράδειγμα

Δίνεται $f(x) = \dfrac{x+a}{x+1}$ με $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το $M(-2,3)$

i) Βρείτε τον αριθμό a
ii) Ορίστε την $f\circ f$
iii) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $(f\circ f)(x)$ και

$g(x) = \dfrac{-x-1}{x^2+x}$ είναι ίσες.

Λύση

i) * Η C_f διέρχεται από το $M(-2,3)$ *

Άρα οι συν/μένες του ικανοποιούν τον τύπο της f, άρα $f(-2)=3$

$$f(-2) = \frac{-2+a}{-2+1} = 3 \iff$$

$$\iff a-2 = -3 \iff \boxed{a=-1}$$

ii) Πρώτα θα βρούμε το πεδίο ορισμού της $f\circ f$

$$A_{f\circ f} = \{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}-\{1\} \text{ και } \frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}-\{1\}\right\}$$

$$= \left\{x \neq -1 \text{ και } \frac{x-1}{x+1} \neq -1\right\}$$

$$= \{x \neq -1 \text{ και } x-1 \neq -x-1\}$$

$$= \{x \neq -1 \text{ και } x \neq 0\} = \mathbb{R}-\{0,1\}$$

Τώρα θα βρούμε τον τύπο της $f \circ f$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}} = \frac{-2(x+1)}{2x(x+1)} \quad \text{με } x \neq -1$$

$$= \frac{-1}{x}$$

iii) Θα βρούμε τα πεδία ορισμού των $f \circ f$ και g.

$$A_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

$$A_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

Άρα $\boxed{A_{f \circ f} = A_g}$

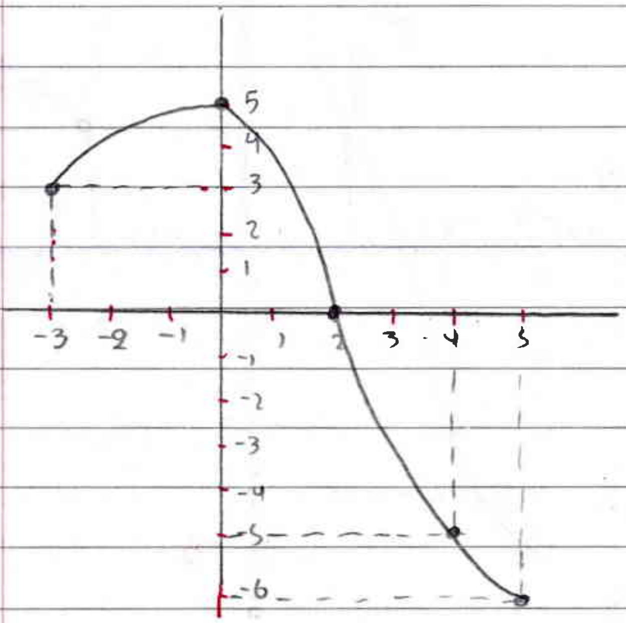
Τώρα για τον τύπο της g έχουμε:

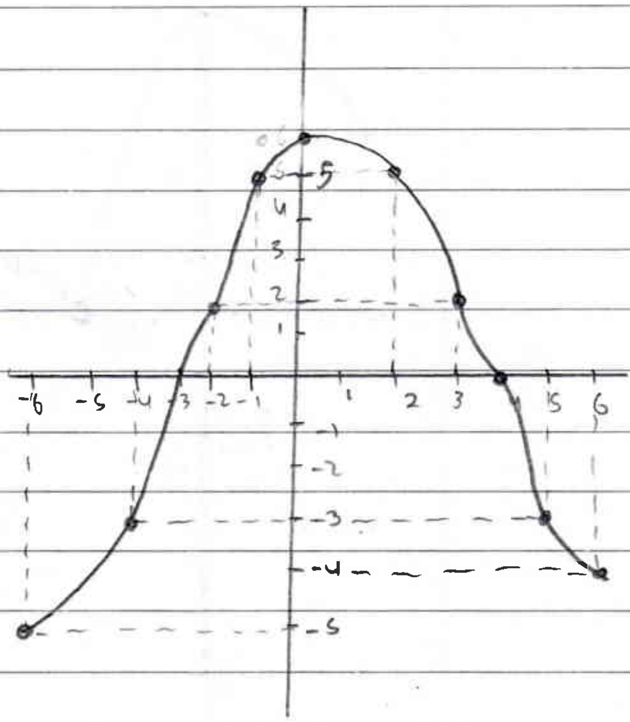
$$g(x) = \frac{-(x+1)}{x(x+1)} = -\frac{1}{x} = (f \circ f)(x)$$

Τελικά λοιπόν $f \circ f = g$

2º Λυμένο Παράδειγμα

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g.





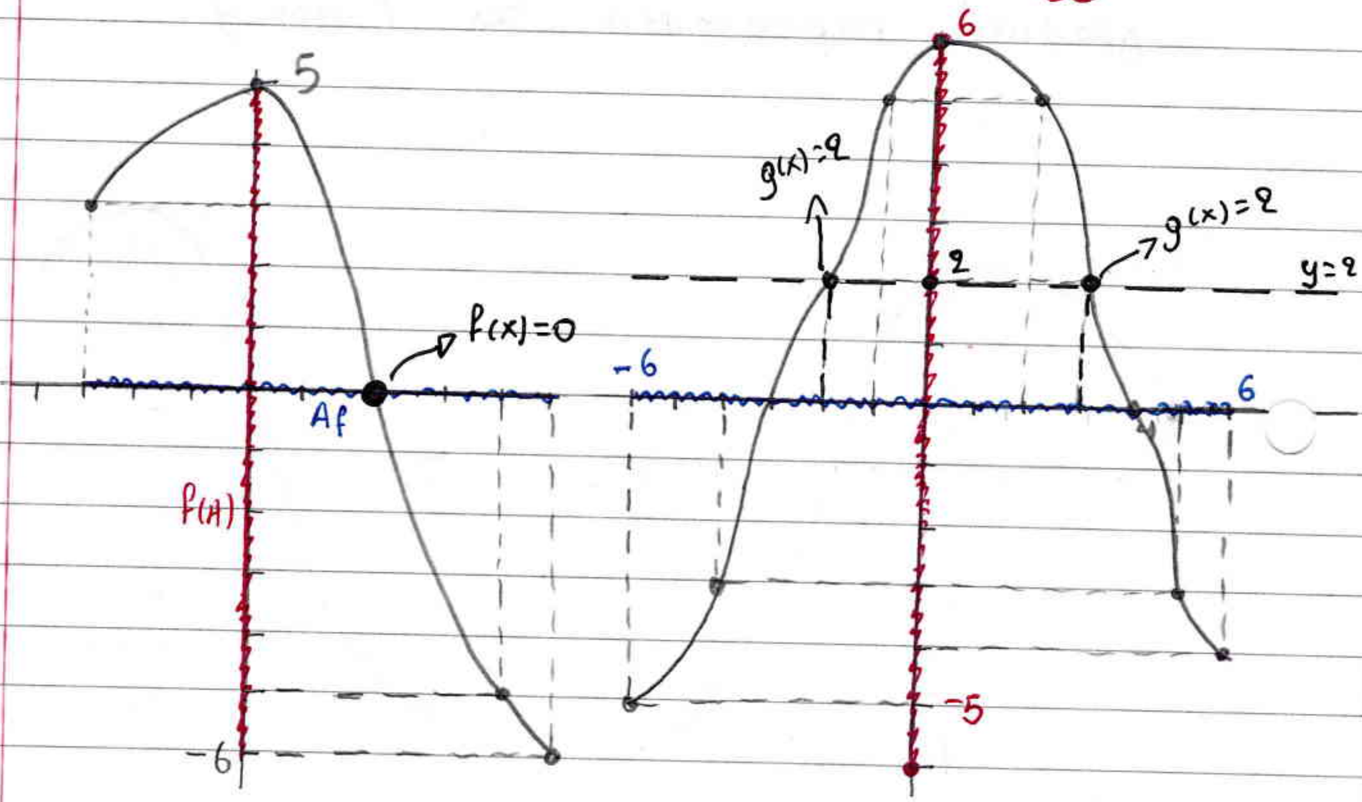
α) Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των f και g

β) Βρείτε τα πεδία ορισμού των $f\circ g$ και $g\circ f$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ g)(x)=0$.

α) Πεδίο Ορισμού : Προβάλλουμε στον xx'

Σύνολο τιμών : Προβάλλουμε στον yy'



Άρα $A_f = [-3, 5]$ ενώ $A_g = [-6, 6]$

Επίσης $f(A) = [-6, 5]$ και $g(A) = [-5, 6]$

β) Γνωρίζουμε ότι:

$A_{f\circ g} = \{x \in A_g$ και $g(x) \in A_f\}$

$A_{g\circ f} = \{x \in A_f$ και $f(x) \in A_g\}$

Επομένως

$A_{f\circ g} = \{ x \in [-6,6]$ και $g(x) \in [-3,5] \}$

$= \{ -6 \le x \le 6$ και $-3 \le g(x) \le 5 \}$

Από το σχήμα της g βλέπουμε ότι:

$-3 \le g(x) \le 5 \iff -4 \le x \le 1$ ή $2 \le x \le 5$

Άρα $A_{f\circ g} = \{ -6 \le x \le 6$ και $-4 \le x \le 5$ ή $2 \le x \le 5 \} = [-4,-1] \cup [2,5]$

Ομοίως

$A_{g\circ f} = \{ x \in [-3,5]$ και $f(x) \in [-6,6] \}$

$= \{ -3 \le x \le 5$ και $-6 \le f(x) \le 6 \}$

Από το σχήμα της C_f έχουμε:

$-6 \le f(x) \le 6 \iff -3 \le x \le 5$

Άρα $A_{g\circ f} = \{ -3 \le x \le 5$ και $-3 \le x \le 5 \} = [-3,5]$

γ) Από το σχήμα της C_f έχουμε:

$f(x) = 0 \iff x = 2$

Άρα $(f\circ g)(x) = 0 \iff f(g(x)) = 0 \iff g(x) = 2$

Πότε όμως $g(x) = 2$; Από την C_g βλέπουμε ότι:

$g(x) = 2 \iff x = -2$ ή $x = 3$

Άρα οι λύσεις είναι $x = -2$ ή $x = 3$.

Άλυτα Παραδείγματα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου η g είναι άρτια και ισχύει:

$$2f(x) - 3f(-x) = x^5 \cdot g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

α) Βρείτε το $f(0)$

β) Αποδείξτε ότι f περιττή

γ) Αποδείξτε ότι η $f \cdot g$ είναι περιττή

2. Δίνεται $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ και η $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$

β) Αν ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$ βρείτε την f

3. Δίνονται $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + a}$ και $g(x) = \ln(x + b)$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Η C_f τέμνει τον yy' στο $-\frac{1}{2}$ και η C_g τέμνει τον xx' στο 2.

α) Βρείτε τα a, b

β) Ορίστε την $f \circ g$

γ) Βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f \circ g}$ με την C_h όπου

$$h(x) = -\frac{x}{4}$$

④ Δίνεται $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x^3 \quad \forall\, x>0$$

α) Βρείτε την συνάρτηση f

β) Αν $g(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$ να βρείτε:

i) την $g\circ f$

ii) τα σημεία τομής της $g\circ f$ με τους άξονες

⑤ Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(f\circ f)(x)=4x-9 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

α) Δείξτε ότι το 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της f

β) Αν επιπλέον ισχύει $(f\circ f\circ f)(x)=8x+a \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$ και $a\in\mathbb{R}$ τότε

i) δείξτε ότι $a=-21$

ii) Βρείτε την συνάρτηση f

⑥ Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x-2)+2f(3-x)=x+8 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

α) Βρείτε τον τύπο της f

β) Δίνεται $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$$(g\circ g)(x)=f(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

i) βρείτε το $g(2)$

ii) δείξτε ότι η $h(x)=(g\circ f)(x)+g(x)$ είναι σταθερή

(7) Αποδείξτε ότι υπάρχουν μόνο δύο συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$f(x)+f(y)+x\cdot y=f(x)\cdot f(y)+1$$

(8) Δίνεται άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+y)=(f\circ f)(x)+(f\circ f)(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$$

Βρείτε τον τύπο της f.

(9) Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(f\circ f)(x)=2-x \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι:

a) $f(1)=1$ και $f(2-x)=2-f(x)$

β) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

γ) $f(0)+f(2)=2$

δ) η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $A(1,1)$

(10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(f\circ g)(x)=x^2-3x+4 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$ και $(g\circ f)(2)=2$

Δείξτε ότι οι C_f, C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

(11) Δίνονται $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=(f\circ f)(x) \ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Αν υπάρχει μοναδικός $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $g(\alpha)=\alpha$ να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=\alpha$