3. Εύρεση ακροτάτων από την μονοτονία

Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε τα ακρότατα της $f(x)=\sqrt{12-2x}-\sqrt{\frac{x+2}{2}}$

Λύση

Μεθοδολογία

i) Βρίσκουμε το Πεδίο ορισμού της f, έστω $A_f=[\alpha,\beta]$

ii) Βρίσκουμε την μονοτονία της f.

iii) • Αν f γν. αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\alpha\le x\le\beta \iff f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$$

Άρα ελάχιστο το $f(\alpha)$, μέγιστο το $f(\beta)$.

• Αν f γν. φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\alpha\le x\le\beta \iff f(\alpha)\ge f(x)\ge f(\beta)$$

άρα ελάχιστο το $f(\beta)$, μέγιστο το $f(\alpha)$.

i) Έχουμε $f(x)=\sqrt{12-2x}-\sqrt{\frac{x+2}{2}}$

Πρέπει $12-2x\ge 0 \iff x\le 6$

και $\frac{x+2}{2}\ge 0 \iff x\ge -2$

Άρα $A_f=[-2,6]$

(ii) Έστω $x_1, x_2 \in [-2, 6]$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$x_1 < x_2 \iff -2x_1 > -2x_2 \iff 12 - 2x_1 > 12 - 2x_2$

$\iff \sqrt{12-2x_1} > \sqrt{12-2x_2}$ (1)

$x_1 < x_2 \iff \frac{x_1+2}{2} < \frac{x_2+2}{2} \iff \sqrt{\frac{x_1+2}{2}} < \sqrt{\frac{x_2+2}{2}}$

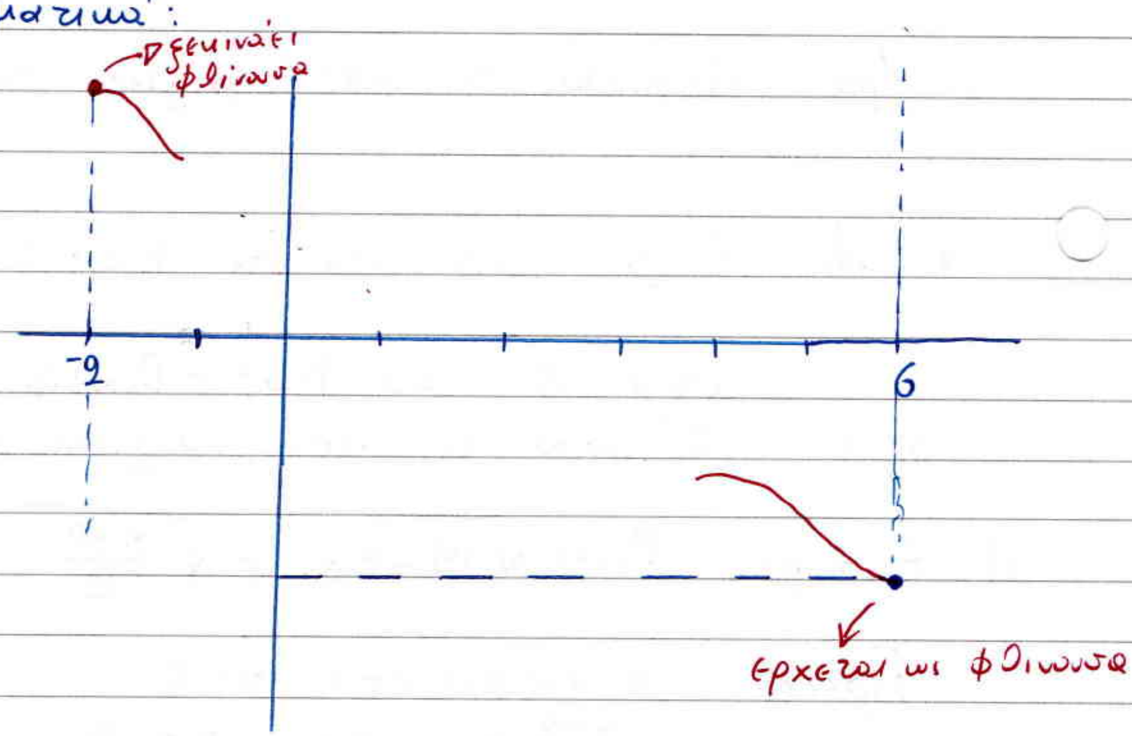
$\iff -\sqrt{\frac{x_1+2}{2}} > -\sqrt{\frac{x_2+2}{2}}$ (2)

Άρα (1) + (2) $f(x_1) > f(x_2)$

iii) Συμπέρασμα

f γν. φθίνουσα στο $[-2, 6]$

Σχηματικά:



Άρα $-2 \le x \le 6 \overset{f \downarrow}{\iff} f(-2) \geq f(x) \geq f(6)$

Άρα το $f(-2)$ μέγιστο και το $f(6)$ ελάχιστο.

Άλυτα Παραδείγματα

(1) Βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x) = 3 - 5x$, $A_f = [-2, 5)$

ii) $f(x) = \frac{10}{x+3}$, $A_f = [-1, 2]$

iii) $f(x) = 2\ln x + 3$ $\quad x \in [1, e]$

iv) $f(x) = 1 - 2\ln(x-1)$ $\quad x \in [2, 3]$

v) $f(x) = 2x - 1$ με $A_f = [-1, 4)$

(2) Αν $f: A \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A)$. Βρείτε αν υπάρχουν ακρότατα της f όταν:

$f(A) = (-\infty, 2]$, $f(A) = [-5, 3) \cup [7, +\infty)$

$f(A) = (-5, 14]$, $f(A) = (-3, 3)$

(3) Δίνεται $f(x) = \sqrt{9 - \sqrt{x}}$. Δείξτε ότι έχει ελάχιστο το μηδέν και μέγιστο το 3

(4) Έστω $f(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}$

Βρείτε τα ακρότατα της f

(5) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$. Δείξτε ότι έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 1.

(6) Ένας μαθητής βρήκε για την $f: A \to \mathbb{R}$ ότι

$-2016 \le f(x) \le 2016 \quad \forall x \in A$

Είπε λοιπόν ότι η $f(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο το -2016 και μέγιστο το 2016. Είναι σωστός

4. Εύρεση Ακροτάτων αν γνωρίζουμε το σύνολο τιμών της f

Λυμένο Παράδειγμα

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A) = [-3, +\infty)$
Βρείτε αν υπάρχουν τα ακρότατα της f.

Λύση

Μεθοδολογία

- Βρίσκω το $f(A)$, αν δεν δίνεται.
- Αν $f(A) = [\alpha, \beta]$ τότε μέγιστο το β και ελάχιστο το α.
- Αν $f(A) = (\alpha, \beta]$ → μέγιστο β και όχι ελάχιστο
- Αν $f(A) = (\alpha, \beta)$ → δεν έχει ακρότατα
- Αν $f(A) = [\alpha, \beta)$ → ελάχιστο α, όχι μέγιστο
- Αν $f(A) = [\alpha, +\infty)$ → ελάχιστο α, όχι μέγιστο
- Αν $f(A) = (\alpha, +\infty)$ → όχι ακρότατα
- Αν $f(A) = (-\infty, \beta]$ → μέγιστο β, όχι ελάχιστο
- Αν $f(A) = (-\infty, \beta)$ → όχι ακρότατα.

Στο παράδειγμά μας $f(A) = [-3, +\infty)$, άρα η f έχει ελάχιστο το -3 και δεν παρουσιάζει μέγιστο.

** Αν γνωρίζαμε τον τύπο της f θα λύναμε την εξίσωση $f(x) = -3$ για να βρούμε την θέση ακροτάτου.

2º Λυμένο Παράδειγμα

Βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = 2x-3$ με $A_f = [-1,3]$

Λύση

1ος Τρόπος : Μονοτονία

Η $f(x)=2x-3$ είναι γν. αύξουσα στο $[-1,3]$

Επομένως $-1 \leq x \leq 3 \iff f(-1) \leq f(x) \leq f(3)$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-1)=-5$ και μέγιστο το $f(3)=3$.

2ος Τρόπος : Σύνολο Τιμών

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ και απαιτούμε να έχει λύση ως προς x.

$y=2x-3 \iff 2x=y+3 \iff x=\frac{y+3}{2}$

Όμως $-1 \leq x \leq 3$ άρα $-1 \leq \frac{y+3}{2} \leq 3$

$\iff -2 \leq y+3 \leq 6$

$\iff -5 \leq y \leq 3$

Άρα $f(A)=[-5,3]$. Επομένως η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το -5.

Λύνω τις εξισώσεις

$f(x)=-5 \iff 2x-3=-5 \iff 2x=-2 \iff x=-1$

$f(x)=3 \iff 2x-3=3 \iff x=3$

Άρα βρήκαμε και τις θέσεις των ακροτάτων.