Θεωρητικές Ασκήσεις στην Σύνθεση Συναρτήσεων

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί την σχέση $f(x)+f(2-x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2. Βρείτε την συνάρτηση f αν ισχύει ότι

$$f(x)+x \leq x^2+1 \leq f(x+1)-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

3. Αν $f(f(x))=e^{2x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι η f παίρνει την τιμή 2014

4. Βρείτε τον τύπο της f όταν:

i) αν $(1-x)f(x-1)+f(1-x)+x=1$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Αν ισχύει $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

5. Αν $f(x)=\dfrac{ax+3}{2-x}$, βρείτε το $a\in\mathbb{R}$, αν ισχύει

$(f\circ f)(x)=x \quad \forall x\neq 2$

6. Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$, αν

$f(2004)=1$ και για κάθε $x,y\neq 0$ ισχύει

$$f(x)\cdot f(y)+f\left(\frac{2004}{x}\right)\cdot f\left(\frac{2004}{y}\right)=2f(xy)$$

Βρείτε την f.

7. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $e^{x+y} \leq f(x) \cdot f(y) \leq f(x+y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

i) $f(0)=1$

ii) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Στην συνέχεια βρείτε τον τύπο της f

8. Για την $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x+y) = f(x) \cdot e^{f(y)-1}$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{f(x)-1}$ και $f(x) = e^{1-f(-x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την f.

9. Για την $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει

$f(x) - f(y) \leq \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ $\forall x,y \in (0,+\infty)$ και $f(1)=0$.

Αποδείξτε ότι $f(x) = \ln x$, $x>0$

10. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x^2+2) + f(3x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Δείξτε ότι η C_f τέμνει τον xx' σε δύο τουλάχιστον σημεία.

10. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x^2+2) + f(3x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Δείξτε ότι η C_f τέμνει τον xx' σε δύο τουλάχιστον σημεία.

11. Προσδιορίστε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\frac{1}{x} f(-x) + f(\frac{1}{x}) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

12. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = 4 - x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Βρείτε το $f(2)$

13. Βρείτε την $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

i) $f(x-1) = x^2 - 3$ $\forall x \in \mathbb{R}$
ii) $f(3x) = x^3$ $\forall x \in \mathbb{R}$

14. Έστω $f(x) = ax - 1$ και $g(x) = 7x - a$ με $a \in \mathbb{R}$.
Βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει

$$f \circ g = g \circ f$$

15. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$(f \circ g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Αποδείξτε ότι $f \circ g = g \circ f$

16. Δίνεται $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + x) + f(8 - x) = e^{x^2 + 2x - 8} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

17. Δίνονται $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+y) - g(x-y) = 4y(x+1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

α) αποδείξτε ότι $f = g$

β) Αν επιπλέον ισχύει $f(2) = 8$ τότε:

i) δείξτε ότι $f(0) = 0$

ii) Βρείτε τον τύπο της f

18. Δίνονται $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x+6) + 3g(2x+15) = 13$$

$$f\left(\frac{x+2}{2}\right) + g(x+5) = \frac{-2x+21}{3}$$

Βρείτε τις f, g