

Ασκήσεις για λύση – Μονοτονία και επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων

Άλλα Παραδείγματα

① Δείξτε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) + 3x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

②* Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{3e^x}{2+f^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

α) Δείξτε ότι $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

β) Δείξτε ότι f γν. αύξουσα

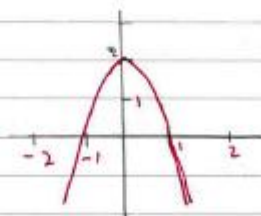
γ) Να λύσει η εξίσωση $\ln f(x) > 0$

③ Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} + f(x) = 1 - e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Να λύσει η ανίσωση:

$$f(f(x^2 + 2x)) < f(f(x+2))$$

④* Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση του σχήματος να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = f(f(x))$ στο $[-1, 0]$



⑤ Αν f γν. αύξουσα στο \mathbb{R} με $f\left(\frac{4x+3f(x)}{7}\right) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Δείξτε ότι $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

⑥ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f γρ. φθίνουσα
και g γρ. αυξάνουσα.

Αποδείξτε ότι η $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γρ. φθίνουσα

⑦ Έστω f με $df = \mathbb{R}$, γρ. μονότονη και η C^1
διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 6)$ και $B(2, 3)$

a) Βρείτε το είδος παραγωγής ως f

b) Να λύσει η ανίσωση $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3$

⑧ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 2f(x) = 2x - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Δείξτε ότι f γρ. αυξάνουσα

⑨ Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\ln(f(x)) + 2f^2(x) = 3 - 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δείξτε ότι f γρ. φθίνουσα

⑩ Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Αν f γρ. φθίνουσα και
 g γρ. αυξάνουσα δείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι γρ. φθίνουσα

⑪ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γρ. φθίνουσα. Μεταπίστε ως
προς την μονοτονία της

$$g(x) = f(2 - x^3) - f(e^x + 3x)$$