Ασκήσεις για Λύση – Ακρότατα – Επαναληπτικές Ασκήσεις

1 Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γν. μονότονη. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$(f\circ g)(x+2016) \geq f(x) \geq f(g(x)+2016) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Δείξτε ότι $g(x)=x-2016$

2. Δίνεται $f:\mathbb{R}\to$ με $f(x)>1 \ \forall x>0$ και $f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Δείξτε ότι f γν. αύξουσα

3. Αν για $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(2015)=1$ τότε

i) δείξτε ότι η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f^2(x)-2f(x)+3$ έχει ελάχιστο

ii) βρείτε το ελάχιστο της g

4. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$

i) δείξτε ότι η $g(x)=\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει μέγιστη τιμή το 1

ii) Βρείτε την μέγιστη τιμή της

$$\phi(x)=\frac{2e^x}{1+e^{2x}}+2013$$

5. Εστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Αν $h(x) = f(x) \cdot f(2-x) + g(x) \cdot g(2-x)$ τότε

i) βρείτε το $h(1)$

ii) δείξτε ότι η h έχει μέγιστο το οποίο και να βρείτε.

6. Βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ να έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 4.

7. Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $g(x) = \dfrac{4f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2.

8. Οι $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα

$$f^2(x) + g^2(x) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Αν οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=3$ δείξτε ότι η $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ έχει μέγιστο το οποίο και να βρείτε.

9. Δίνεται συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2\lambda x-9 & \text{αν } x<0 \\ \lambda x-2 & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$$

i) Βρείτε το λ ώστε $f(1)=2$

ii) Βρείτε τις τιμές του λ ώστε f γν. μονότονη.

iii) Αν η C_f διέρχεται από το $A(-2,6)$ να λύσετε:

α) την εξίσωση $f(x)=6$

β) την ανίσωση $f(x)\geq 6$

10. Έστω $f(x)=5\cdot\sqrt[3]{x}+e^{2x}$

i) Δείξτε ότι f γν. αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

ii) Δείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$5\sqrt[3]{x^2+2x+5}+e^{2x^2+4x+10} < 5\sqrt[3]{x^2+4x+4}+e^{2x^2+8x+8}$$

iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$5\sqrt[3]{\alpha+\beta-1}+e^{2\alpha+2\beta-2}+5\cdot\sqrt[3]{\alpha-\beta+1}+e^{2\alpha-2\beta+2}-2=0$$