Κατανοώντας Καλύτερα το Σχολικό Βιβλίο

13. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$

Αν $f^2(x) = g^2(x)$ τότε ισχύει

$f(x) = g(x) \ \forall x \in A$ ή $f(x) = -g(x) \ \forall x \in A$;

Η απάντηση είναι ΟΧΙ !!!

Έστω για παράδειγμα έχουμε $f^2(x) = \ln^2 x$.

Τότε υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις $f(x)$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) = \ln^2 x$.

Αυτές είναι οι εξής:

$f(x) = \ln x \quad \forall x \in (0,+\infty)$

$f(x) = -\ln x \quad \forall x \in (0,+\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{αν } x \in A \neq \emptyset \\ -\ln x & \text{αν } x \in (0,+\infty) - A \end{cases} \quad \text{με } A \subseteq (0,+\infty)$$

Παρατήρηση

Ο τελευταίος τύπος δίνει άπειρες συναρτήσεις αφού το σύνολο A μπορεί να είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του $(0,+\infty)$.

Όμως δεν θα είναι όλες αυτές οι συναρτήσεις συνεχείς.

Όπως θα δουμε σε επόμενη ενότητα θα πρεπει $\ln x = -\ln x \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

Άρα αν f συνεχής εχουμε μόνο 4 συναρτήσεις.

$f(x) = \ln x \quad \forall\, x \in (0, +\infty)$

ή

$f(x) = -\ln x \quad \forall\, x \in (0, +\infty)$

ή

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x, & x \in (0,1) \\ \ln x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0,1) \\ -\ln x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$