Κατανοώντας Καλύτερα το Σχολικό Βιβλίο.

(18) Αν f, g γνησίως αύξουσες στο κοινό πεδίο ορισμού τους, τότε

α) $f+g$ γν. αύξουσα

β) αν $f(x)>0$ κ $g(x)>0$ τότε και η $f\cdot g$ είναι γν. αύξουσα

γ) αν $f(x)<0$ και $g(x)<0$ τότε η $f\cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

απόδειξη

α) Έστω $x_1, x_2 \in D_f = D_g$ με $x_1 < x_2$.

Τότε $f(x_1) < f(x_2)$ (1) και $g(x_1) < g(x_2)$ (2) αφού f, g γν. αύξουσες.

Άρα $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$
$\Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$

Άρα $f+g$ γν. αύξουσα.

β) Αφού $f(x), g(x) > 0$ μπορούμε να πολ/με τις (1) και (2) κατά μέλη. Επομένως

$$f(x_1)\cdot g(x_1) < f(x_2)\cdot g(x_2)$$

$$(f\cdot g)(x_1) < (f\cdot g)(x_2)$$

Άρα $f\cdot g$ γνησίως αύξουσα.

γ) $f(x_1) < f(x_2)$

$\Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2)$ (3) με $-f(x_1), -f(x_2) > 0$

Ομοίως $-g(x_1) > -g(x_2)$ (4) με $-g(x_1), -g(x_2) > 0$

Άρα πολλ/ντας κατά μέλη τις (3) κ (4)

έχουμε:

$$f(x_1) \cdot g(x_1) > f(x_2) \cdot g(x_2)$$

$$(f \cdot g)(x_1) > (f \cdot g)(x_2)$$

Άρα η $f \cdot g$ γνησίως φθίνουσα.