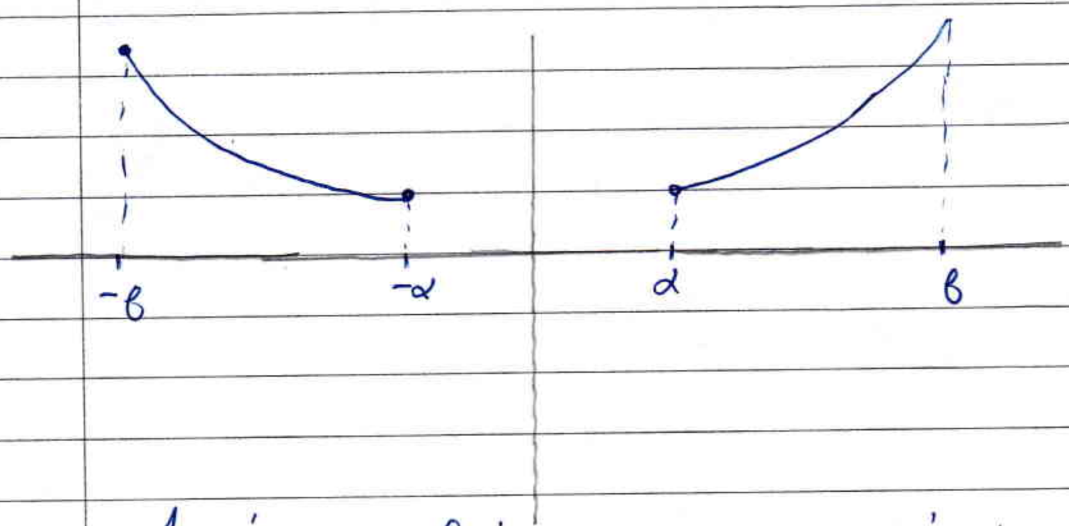
Καταναοώντας Καλύτερα το Σχολικό Βιβλίο

(20) (Α) Αν f άρτια και γνησίως αύξουσα στο (α,β) τότε η f θα είναι γν. φθίνουσα στο $(-\beta,-\alpha)$

Σχηματικά η πρόταση μας λέει:



Αυτό συμβαίνει στην γνωστή μας $f(x)=x^2$ που είναι άρτια, και είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$ ενώ είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0)$

απόδειξη

Αρχικά $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x)=f(x)$ (αν $D_f=\mathbb{R}$)

Όμως για κάθε $x_1,x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 \neq x_2$

εφ' όσον f γν. αύξουσα στο (α,β) θα ισχύει το εξής:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$$

Τώρα αν $x \in (\alpha,\beta) \iff -x \in (-\beta,-\alpha)$, άρα $-x_1,-x_2 \in (-\beta,-\alpha)$

Όμως

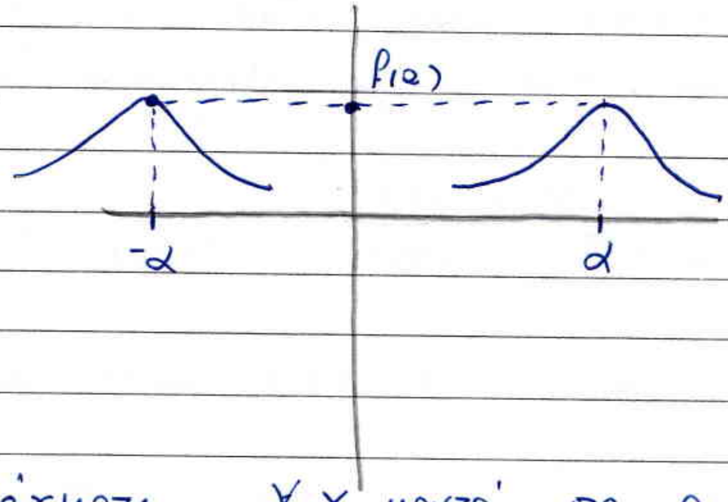
$$\frac{f(-x_1)-f(-x_2)}{-x_1-(-x_2)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} < 0$$

Άρα στο $(-\beta,-\alpha)$ η f είναι γν. φθίνουσα.

(Β) Αν f άρτια και f παρουσιάζει στο α μέγιστο τότε στο $-\alpha$ θα παρουσιάζει το ίδιο μέγιστο $f(\alpha)$.

απόδειξη

Σχηματικά θα έχουμε:



Πράγματι $\forall x$ κοντά στο α θα έχουμε $f(x) \leq f(\alpha)$

Άρα αφού f άρτια θα έχουμε $f(-x) \leq f(-\alpha)$
αφού $f(-x)=f(x)$ και $f(-\alpha)=f(\alpha)$

Άρα $\forall -x$ κοντά στο $-\alpha$ θα έχουμε
$f(-x) \leq f(-\alpha)$

Άρα στο $-\alpha$ θα έχουμε μέγιστο το $f(-\alpha)=f(\alpha)$

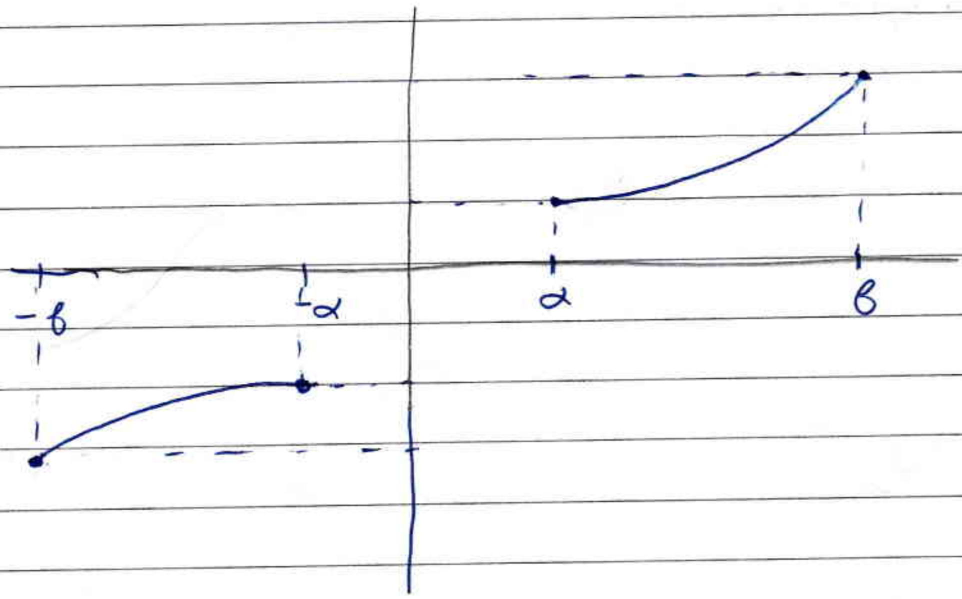
Καταλαβαίνοντας Καλύτερα το Σχολικό Βιβλίο

(21) (A)

Αν f περιττή και f γν. αύξουσα στο (α, β)

τότε f γν. αύξουσα και στο $(-\beta, -\alpha)$

Σχηματικά....



Διατηρείται δηλαδή η μονοτονία. (π.χ $f(x)=x^3$)

Πράγματι

$\forall\ x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow -x_1, -x_2 \in (-\beta, -\alpha)$

Επίσης $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ αφού f γν. αύξουσα στο (α, β)

Άρα $\dfrac{f(-x_1)-f(-x_2)}{-x_1-(-x_2)} = \dfrac{-f(x_1)+f(x_2)}{x_2-x_1}$

$= \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $(-\beta, -\alpha)$