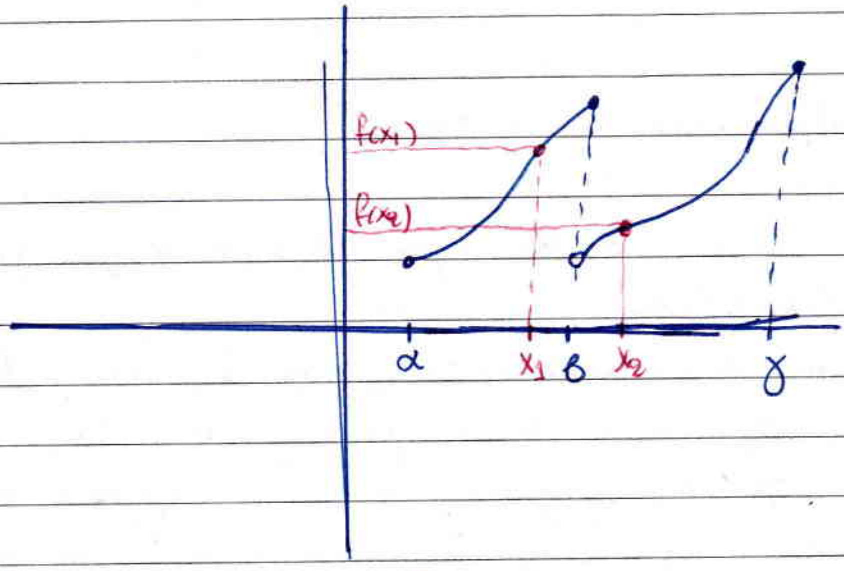
Κατανοώντας Καλύτερα το Σχολικό Βιβλίο

(24) Μονοτονία κατά Διαστήματα

Ερώτημα

Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε τα εξής:



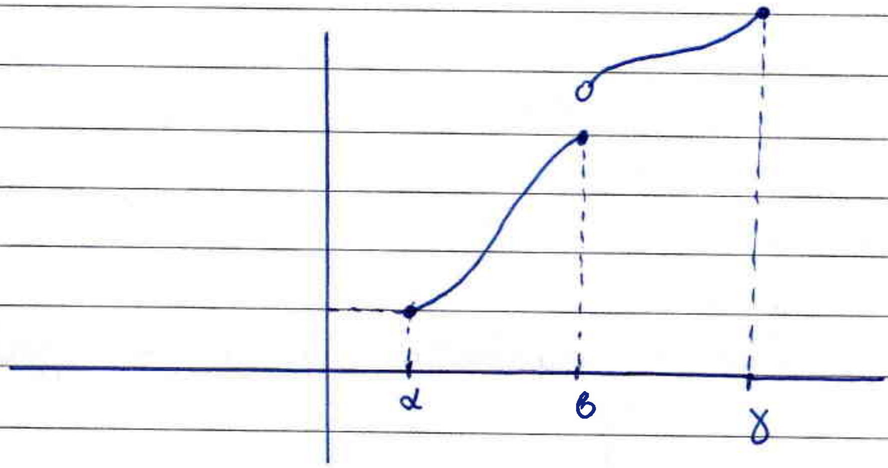
Στο $(\alpha,\beta]$ η f είναι γνησίως αύξουσα όπως και στο (β,γ).

Τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα κατά διαστήματα.

Είναι όμως η f γν. αύξουσα και στο (α,γ), δηλαδή στην ένωση των δύο διαστημάτων;

Φυσικά και όχι αφού βλέπουμε ότι για $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Γιατί δεν είναι γν. αύξουσα στο (α,γ); Τι νομίζετε ότι "χαλάει";
Μια προφανής απάντηση είναι ότι το σχήμα "διακόπτεται".
Δείτε το επόμενο σχήμα....



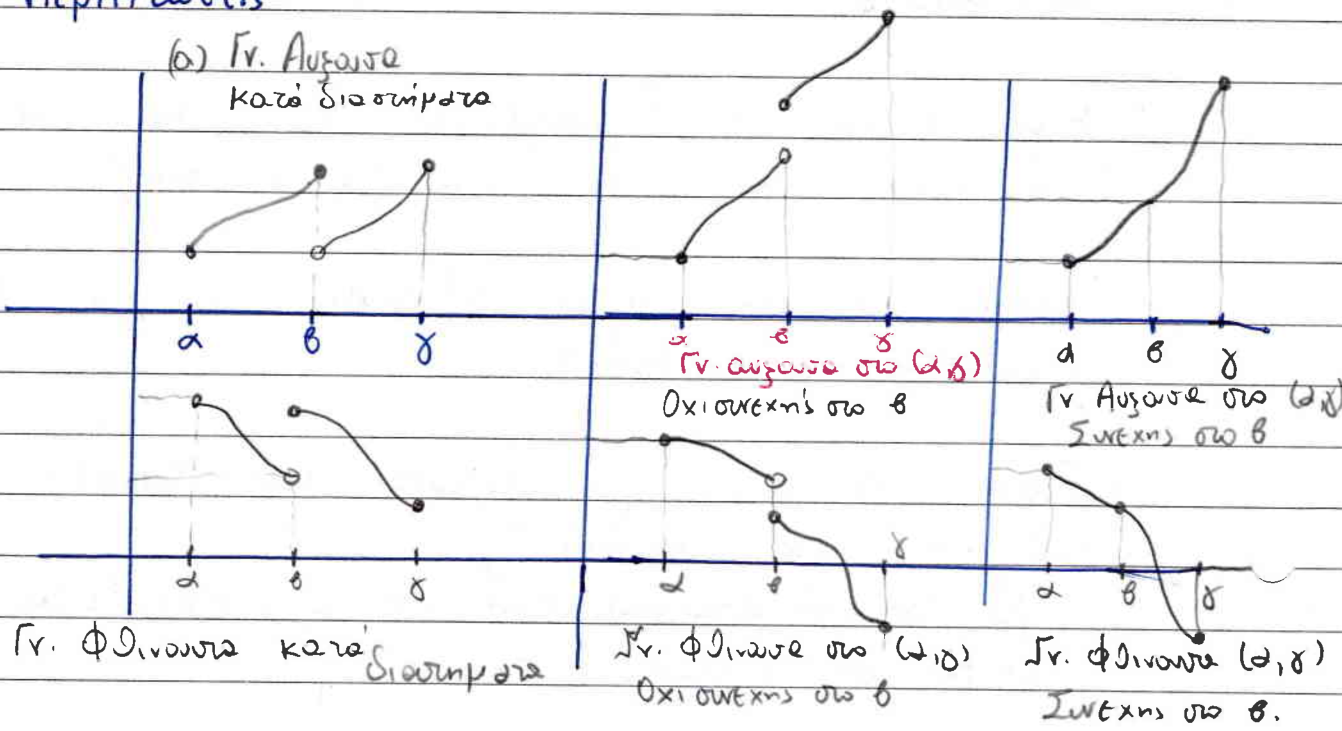
Το σχήμα πάλι "διακόπτεται" (η f δεν είναι συνεχής στο $β$, όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα), όμως τώρα για κάθε x_1, x_2 με $x_1, x_2 \in (α, γ)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$

Άρα στην περίπτωση αυτή, παρόλο που η f δεν είναι συνεχής στο $β$, η f είναι γν. αύξουσα στο $(α, γ)$.

Αυτό συμβαίνει, γιατί το "2ο κομμάτι του σχήματος" ξεκινάει κάνοντας "άλμα", πιο "ψηλά" απ' ότι το πρώτο.

Την τελευταία πρόταση, θα την "μαθηματικοποιήσουμε" στην ενότητα των ορίων.

Άρα έχουμε τις παρακάτω "σχηματικές" περιπτώσεις



Στην ενότητα της Συνέχειας θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση

Αν f γν. αύξουσα στο (α, β) και γν. αύξουσα στο (β, γ) και f συνεχής στο β, τότε f γνησίως αύξουσα στο (α, γ).

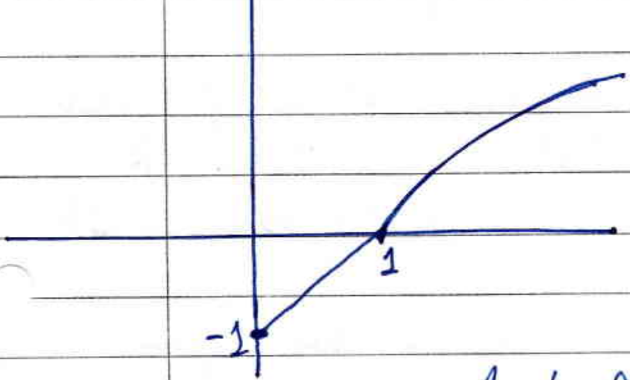
Όμως όπως είδαμε η συνέχεια στο β, δεν είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη.

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & , 0 \le x < 1 \\ \ln x & , 1 \le x \end{cases}$$

Τι κάνουμε λοιπόν σ' αυτές τις περιπτώσεις;
Στο $[0,1)$ η f είναι γν. αύξουσα
Στο $[1,+\infty)$ η f είναι γν. αύξουσα

Θα δούμε σε επόμενη ενότητα ότι f συνεχής στο 1.
Άρα f γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Σχηματικά έχουμε:



Αν f δεν είναι συνεχής στο ενδιάμεσο σημείο πρέπει να δούμε αν έχουμε κάποιο από τα σχήματα
(α), (β) (δ) ή (ε)
για να δούμε τι συμβαίνει.
Αυτό θα το δούμε στην επόμενη ενότητα.

Άρα συμπερασματικά... έχουμε:

Γνησίως Αύξουσα

α) Γν. Αύξουσα στο (α,β)
Γν. Αύξουσα στο (β,γ)
f συνεχής στο β
} f γν. αύξουσα στο (α,γ)

β) Γν. Αύξουσα στο (α,β)
Γν. Αύξουσα στο (β,γ)
f όχι συνεχής στο β
Το 2ο κομμάτι πιο ψηλά από το 1ο
} Τότε f γν. αύξουσα στο (α,γ)

γ) Γν. Αύξουσα στο (α,β)
Γν. Αύξουσα στο (β,γ)
f όχι συνεχής στο β
Το 2ο κομμάτι πιο χαμηλά από το 1ο
} f γν. αύξουσα μόνο κατά διαστήματα (όχι σ' όλο το (α,γ))

Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν για την γν. φθίνουσα.

Μπορείτε να τα διατυπώσετε;

Το θέμα είναι στις περιπτώσεις (β) και (γ) πως θα βρίσκουμε αν το "2ο κομμάτι" της f βρίσκεται πιο ψηλά ή πιο χαμηλά από το 1ο.

Αυτό θα το δούμε στην ενότητα των Ορίων.