Κατανοώντας Καλύτερα το Σχολικό Βιβλίο

26. Αντιστροφή Κλαδωτής

Πρώτα πρέπει να εξετάσουμε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Βήμα 1º

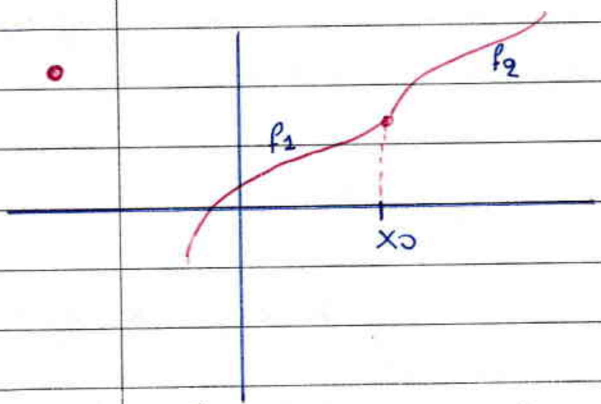
Εξετάζουμε την γνήσια μονοτονία κάθε κλάδου χωριστά

* Αυτό θα μπορεί να γίνει αργότερα πιο εύκολα, στην ενότητα των παραγώγων *

1η περίπτωση: Έχουν και οι δύο κλάδοι το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας.

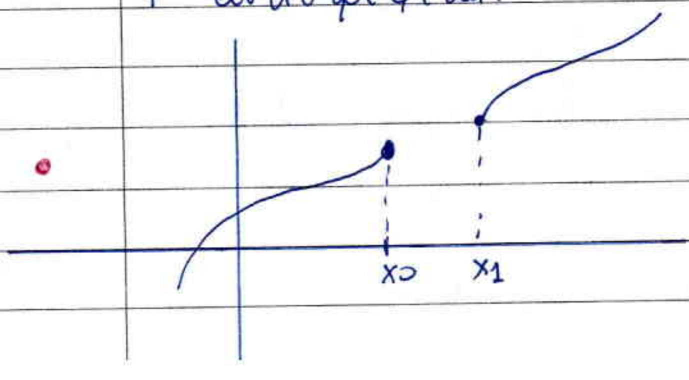
Ας δούμε για παράδειγμα ότι και οι δυο κλάδοι είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις.

Σχηματικά, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- 

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$$

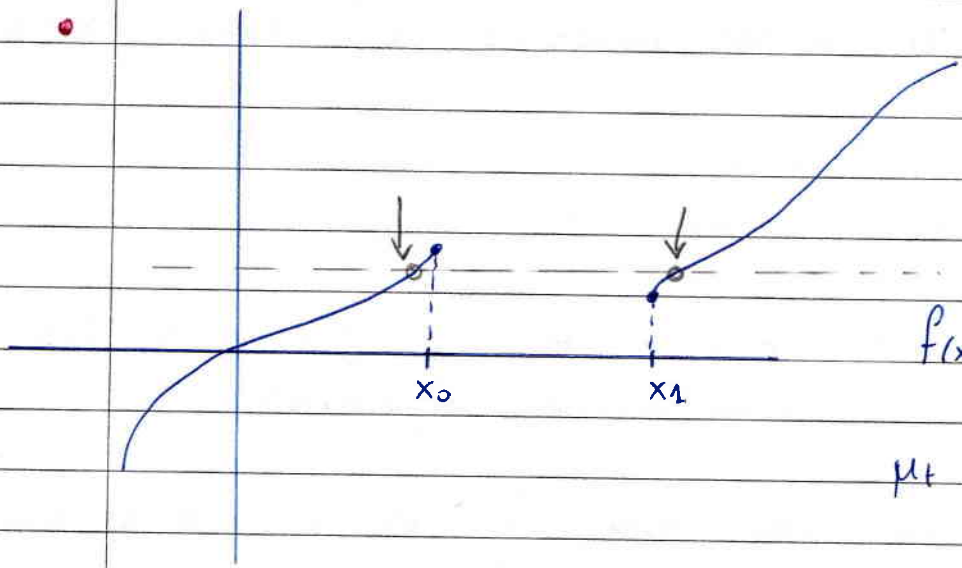
Εδώ παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και άρα, όπως έχουμε πει, η f είναι γν. μονότονη σ' όλο το πεδίο ορισμού, άρα είναι 1-1 άρα η f αντιστρέφεται.

- 

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x), & x \ge x_1 \end{cases}$$

με $f(x_1) > f(x_0)$

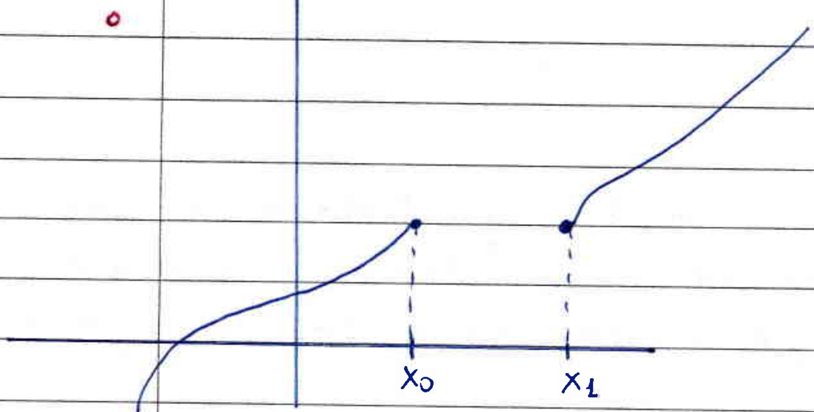
Εδώ η f είναι συνεχής και στο x_0 και στο x_1 και επειδή ο 2ος κλάδος ξεκινά "πιο ψηλά" από τον 1ο κλάδο, έπεται ότι η f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x), & x \ge x_1 \end{cases}$$

με $f(x_1) < f(x_0)$

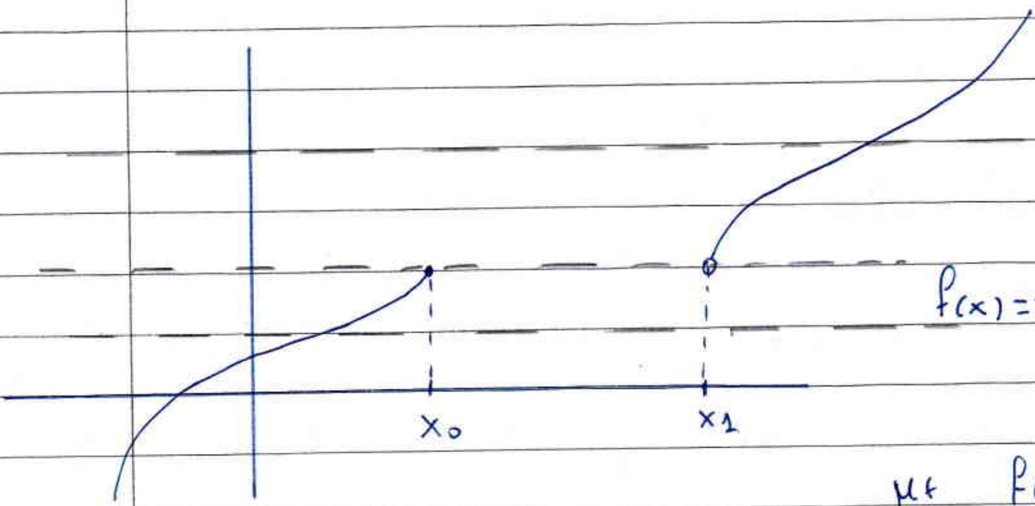
Εδώ παρατηρούμε ότι $f(x_1) < f(x_0)$ άρα η f δεν είναι γν. μονότονη σ' όλο το πεδίο ορισμού. Επειδή f συνεχής η f δεν αντιστρέφεται.



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x) & x \ge x_1 \end{cases}$$

με $f(x_0) = f(x_1)$

Τότε αφού $x_1 \neq x_0$ και $f(x_0) = f(x_1)$ φυσικά η f δεν είναι 1-1.



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x), & x > x_1 \end{cases}$$

με $f(x_0) = \lim_{x \to x_1^+} f_2(x)$

Βλέπουμε ότι ο $2^{ος}$ κλάδος ξεκινά στο ίδιο ύψος με τον $1^{ο}$ κλάδο αλλά το $f(x_1)$ δεν ορίζεται αφού $D_f = (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$

Παρόλα αυτά η f είναι 1-1 στο D_f αφού όπως μπορείτε να "τσεκάρετε" κάθε παράλληλη ευθεία στον xx' τέμνει την C_f σε μοναδικό σημείο.

Άρα έχουμε τα εξής συμπεράσματα, πάντα στην περίπτωση όπου έχουμε την ίδια μονοτονία και στους δύο κλάδους.

Συμπέρασμα $1^{ο}$

Αν $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$ και f συνεχής στο x_0

(στο σημείο αλλαγής τύπου), τότε η f αντιστρέφεται.

Συμπέρασμα $2^{ο}$

Αν $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \le x_0 \\ f_2(x) & x \geq x_1 \end{cases}$ τότε η f

αντιστρέφεται μόνο αν $f(x_1) > f(x_0)$ (αν $f_1, f_2 \uparrow$)

ή $f(x_1) < f(x_0)$ (αν f_1, f_2 φθίνουσες)

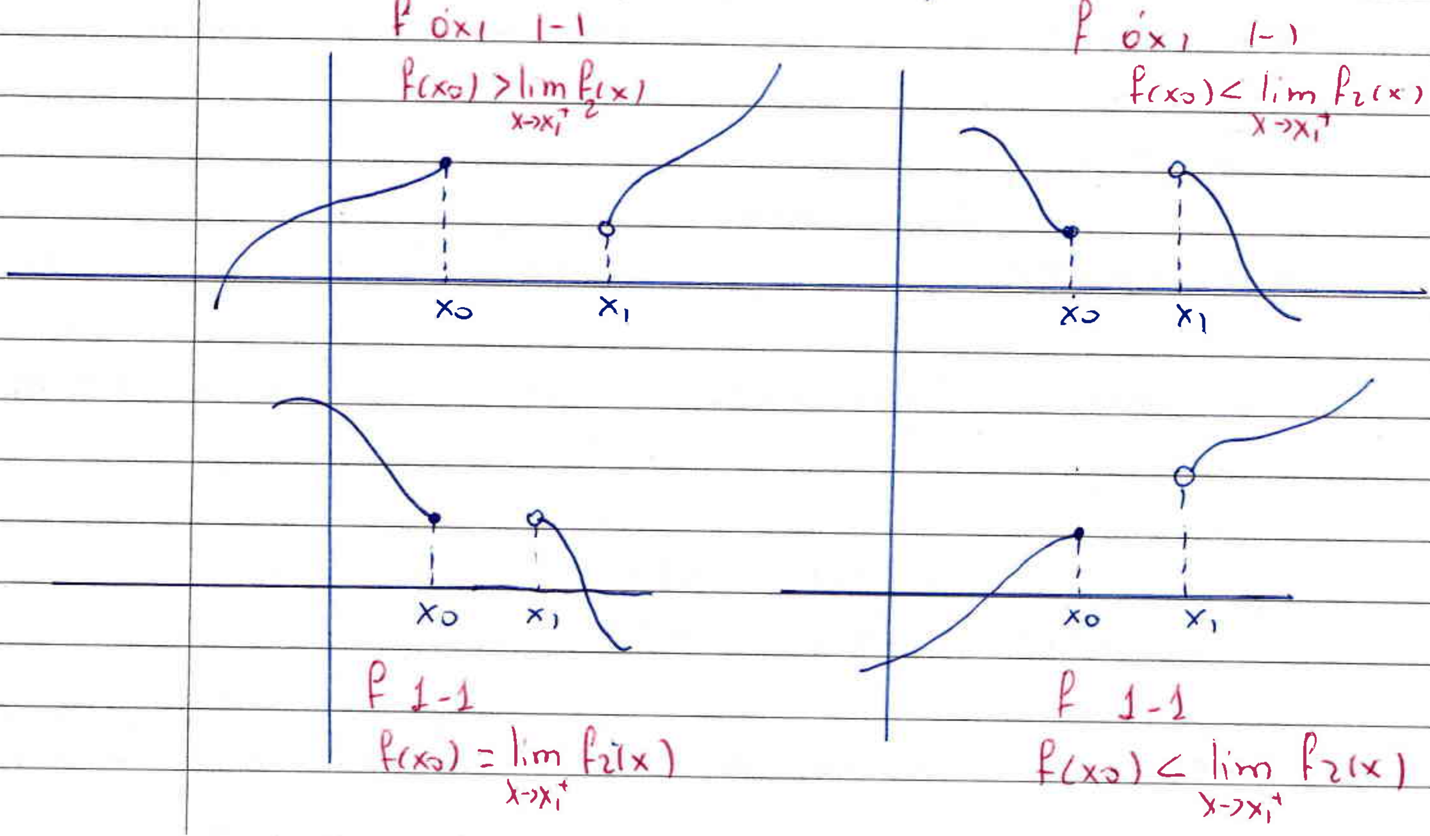
Συμπέρασμα 3º

Αν $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x), & x > x_1 \end{cases}$ (δηλαδή ή στο x_0 ή στο x_1 δεν ορίζεται η f), τότε συγκρίνουμε τα $f(x_0)$ και $\lim\limits_{x \to x_1^+} f_2(x)$

Στην περίπτωση όπου f_1, f_2 γν. αύξουσες θα πρέπει $f(x_0) \le \lim\limits_{x \to x_1^+} f_2(x)$, ενώ στην περίπτωση όπου f_1, f_2 γν. φθίνουσες, θα πρέπει

$$f(x_0) \geq \lim_{x \to x_1^+} f_2(x)$$

Δείτε τα παρακάτω σχήματα



2η Περίπτωση:

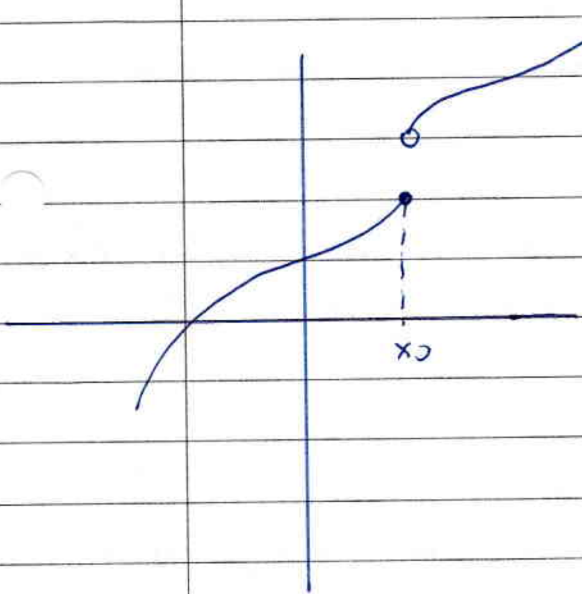
Εδώ θα αναφερθούμε στον τύπο $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$

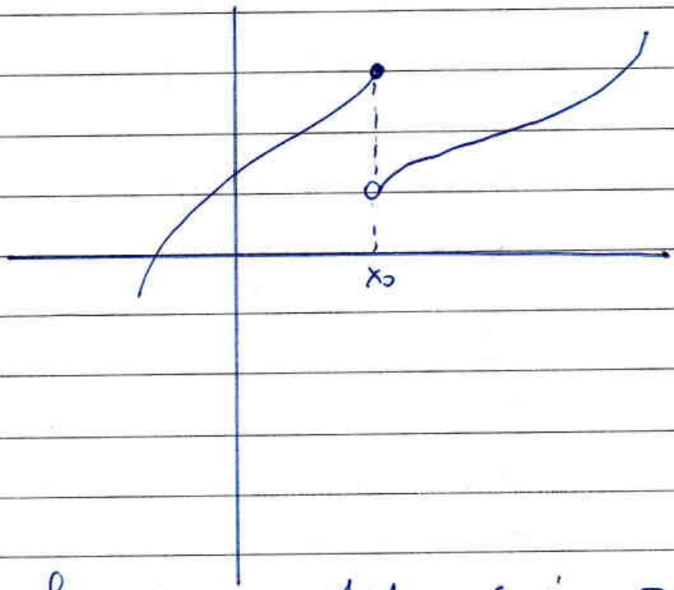
με f_1, f_2 με το ίδιο είδος γν. μονοτονίας

και η f ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ x_0.

Μήπως μια γρήγορη απάντηση είναι να πούμε, ότι αφού f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν θα είναι γν. μονότονη άρα ούτε 1-1;

Δείτε τα παρακάτω σχήματα!!!

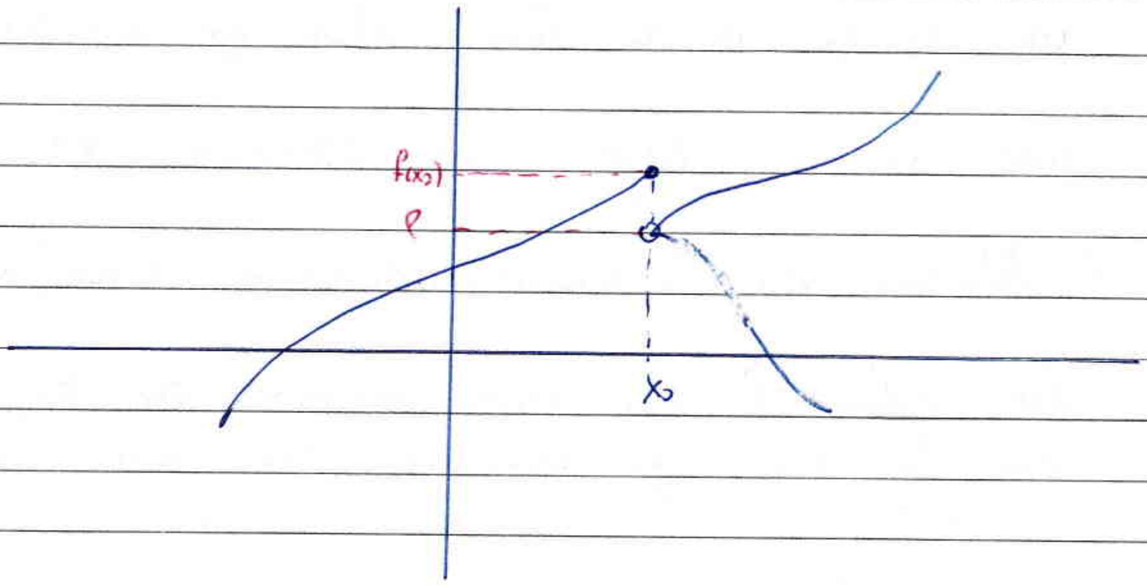




Στο 1ο σχήμα η f είναι 1-1 ενώ στο 2ο δεν είναι. Τι χαλάει στο 2ο σχήμα; Αυτό που με "απλά" λόγια "χαλάει" είναι ότι στο 2ο σχήμα ο 2ος κλάδος ξεκινά πιο χαμηλά απ' ότι ο 1ος τελειώνει

Δηλαδή ισχύει $f(x_0) > \lim_{x \to x_1^+} f_2(x)$

Θα το δούμε όμως λίγο καλύτερα με τα σύνολα τιμών των κλάδων f_1 και f_2.



Το σύνολο τιμών του κλάδου f_1 είναι το $(-\infty, f(x_0)]$

και το σύνολο τιμών της f_2 είναι του ~~...~~, $(\ell, +\infty)$ με $\ell < f(x_0)$.

Αυτό σημαίνει ότι τα δυο σύνολα τιμών έχουν κοινά στοιχεία άρα η f δεν είναι 1-1.

Συμπέρασμα

Αν f δεν είναι συνεχής στο x_0, και τα σύνολα τιμών των f_1, f_2 έχουν έστω και ένα κοινό σημείο, τότε η f δεν αντιστρέφεται.

Αν τα σύνολα τιμών των δυό κλάδων είναι ξένα μεταξύ τους, τότε η f θα αντιστρέφεται.

3η Περίπτωση

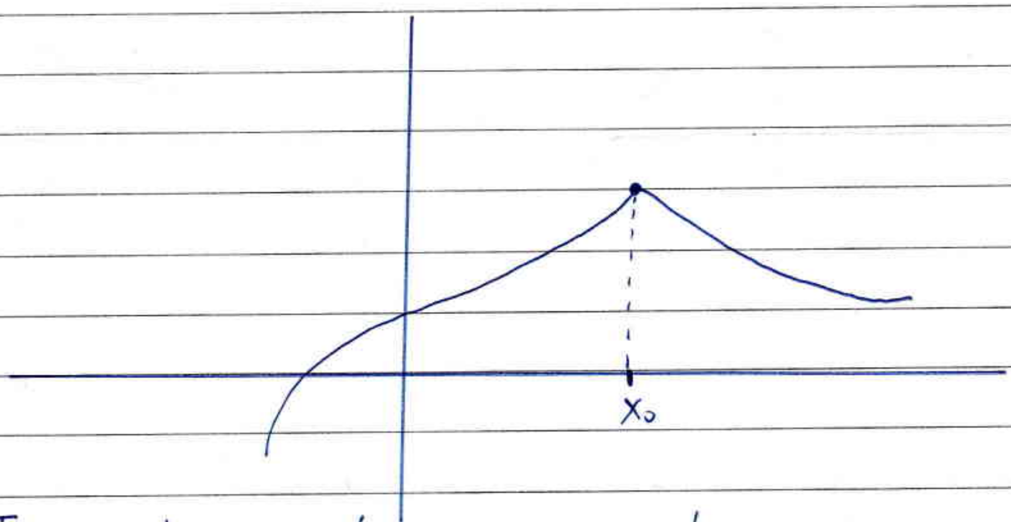
Εδώ έχουμε:

- $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x) & x > x_0 \end{cases}$

- f_1, f_2 διαφορετικό είδος μονοτονίας

- f είναι συνεχής στο x_0

Ας το δούμε σχηματικά



Τότε όπως φαίνεται και από το σχήμα η f δεν μπορεί να είναι 1-1.

Άρα:

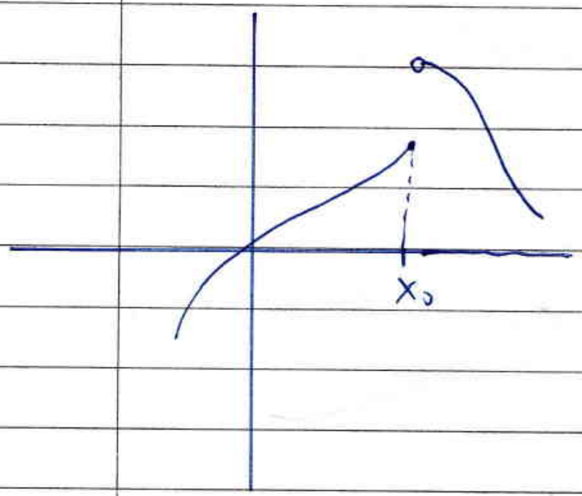
Αν f_1, f_2 διαφορετικό είδος μονοτονίας και f συνεχής στο x_0 η f δεν αντιστρέφεται!!!

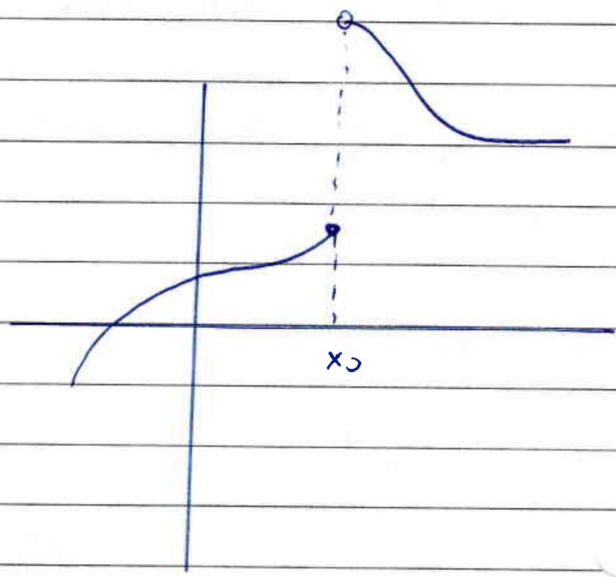
4η Περίπτωση

- $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$

- f_1, f_2 διαφορετικό είδος μονοτονίας
- f όχι συνεχής στο x_0

Ας το δούμε και πάλι σχηματικά.



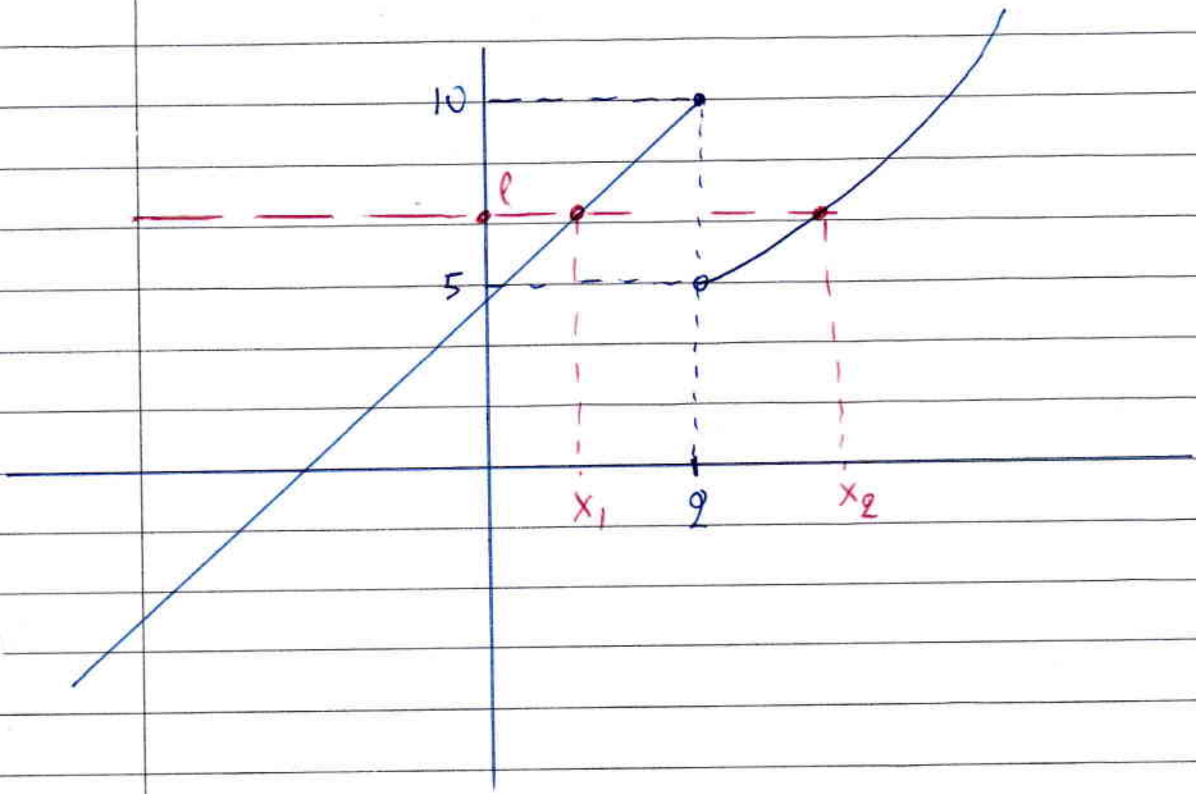


Στο 1ο σχήμα f όχι 1-1 } ΓΙΑΤΙ???
Στο 2ο σχήμα f 1-1

Πάλι έχουμε να κάνουμε με τα σύνολα τιμών.

Αν τα σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους τότε f 1-1

Αν τα σύνολα τιμών έχουν έστω και ένα κοινό σημείο τότε f όχι 1-1



Βλέπουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\ell \in (5,10]$

με $f(x_1) = f(x_2) = \ell$ άρα η f δεν αντιστρέφεται.

Έστω ότι f είναι 1 - 1

Τότε:

- Βρίσκουμε την αντίστροφη κάθε κλάδου χωριστά
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}
- $f^{-1}(x) = \begin{cases} f_1^{-1}(x) & , x \leq x_1 \\ f_2^{-1}(x) & , x > x_1 \end{cases}$

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6 & , x \leq 2 \\ x^2+1 & , x > 2 \end{cases}$$

- Με τον ορισμό ή με παραγώγους, ενώ όλο βρίσκουμε ότι για $x \leq 2$ f γν. αύξουσα και για $x > 2$ f γν. αύξουσα.

Άρα κάθε κλάδος χωριστά είναι 1-1 όμως η f δεν είναι απαραίτητα 1-1 στο $\mathbb{R}$.

- Συνέχεια

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x+6 = 10$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2+1 = 5$

άρα f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

• Θα μπορούσαμε να πούμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 10 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 5 \\ f_1, f_2 \text{ γν. αύξουσες} \end{array}\right\}$$

Ο $2^{ος}$ κλάδος ξεκινά "πιο χαμηλά" από τον $1^{ο}$ άρα f όχι 1-1.

Αλλά ας το δούμε καλύτερα με τα σύνολα τιμών.

Για την $f_1(x) = 2x+6$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_1 \uparrow \\ \bullet\ \lim_{x\to -\infty} (2x+6) = -\infty \\ \bullet\ \lim_{x\to 2^-} (2x+6) = 10 = f(2) \end{array}\right\} \quad f_1\big((-\infty, +2]\big) = (-\infty, 10]$$

Για την $f_2(x) = x^2+1$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_2 \uparrow \\ \bullet\ \lim_{x\to 2^+} f_2(x) = 5 \\ \bullet\ \lim_{x\to +\infty} f_2(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad f\big((2, +\infty)\big) = (5, +\infty)$$

Τα δύο σύνολα τιμών έχουν κοινά στοιχεία, το τμήμα $(5, 10]$ άρα η f δεν αντιστρέφεται.
Σχηματικά θα είχαμε: