

Καταχώριτας Καλύτερα το Γκολικό Βιβλίο

30. Σύνθεση και 1-1

Αν f, g 1-1 και ορίζεται η $g \circ f$, τότε
και η $g \circ f$ είναι 1-1 και ισχύει

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Απόδειξη

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_{g \circ f}$ έχουμε (με $x_1 \neq x_2$)

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\stackrel{g \text{ 1-1}}{\implies} f(x_1) = f(x_2)$$

$$\stackrel{f \text{ 1-1}}{\implies} x_1 = x_2$$

Άρα η $g \circ f$ είναι 1-1!!!

* Αν λοιπόν έχω νόημα οι συνθέσεις, έχουμε:

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$\Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)(g \circ f)^{-1}(x) = (f \circ g)[g^{-1}(f^{-1}(x))]$$

$$\Leftrightarrow x = f(g(g^{-1}(f^{-1}(x)))) \Leftrightarrow x = f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow x = x$$