

Κατανοώντας Καλύτερα το Γκολίνο Βιβλίο

31 Αν f αντιστρέφεται και f γρ. μόνωτον, τότε η f^{-1} δε έχει το ίδιο είδος γνήσιες μονοτονίες.

α' τρόπος Υποθέτουμε ότι f γρ. αύξουσα ^{ανόσειξη} $\overset{\text{στο } \Omega}{\text{Τότε:}}$

για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in f(\Omega)$ με $y_1 < y_2$, υπάρχουν x_1, x_2 με $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$.

$$\begin{aligned} \text{Από } f(x_1) = y_1 &\Leftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1) \\ \text{και } f(x_2) = y_2 &\Leftrightarrow x_2 = f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Από } y_1 < y_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{f^{-1}} x_1 < x_2 \\ &\Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Αρα η f^{-1} είναι γρ. αύξουσα.

β' τρόπος

Εστω ότι η f^{-1} δε είναι γρ. αύξουσα. Τότε δε υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(\Omega)$ με $y_1 < y_2$ και

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \quad \text{Αρα έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) &\xrightarrow{f} f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \\ &\Rightarrow y_1 \geq y_2 \quad (\text{αίτιο}) \end{aligned}$$