

Κατανοώντας Καλύτερα το ΊσοΝισό Βιβλίο

33. α) $\forall f, g, h$ ορισμένες στο \mathbb{R} με $f \circ g = f \circ h$

και η f είναι 1-1 τότε $g = h$

β) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = x$ τότε g είναι 1-1

γ) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

τότε $f^{-1} = g$ και $g^{-1} = f$

απόδειξη

α) $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f \circ g = f \circ h$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) = f(h(x))$$

$$\stackrel{f \text{ 1-1}}{\Rightarrow} g(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα $g = h$

β) Έστω $x_1, x_2 \in D_g$ και $x_1, x_2 \in D_{f \circ g}$ αφού υποθέτουμε ότι ορίζεται η $f \circ g$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε : } g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \\ &\Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι 1-1.

γ)