

Καταχώριση Καλύτερα το Ιχθυόμο Βιβλίο

38. Αν η $f: A \rightarrow B$ είναι γν. αύξουσα, τότε

οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}

τέμνονται πάντα στην απόδειξη $y=x$.

Εστω $K(x) = x + f(x)$. και εστω $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$
με $x_1 < x_2$.

Τότε επειδή $f \uparrow$ έχουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$
Άρα $x_1 + f(x_1) < x_2 + f(x_2)$

$$\Rightarrow K(x_1) < K(x_2)$$

Άρα η K είναι γν. αύξουσα και 1-1.

Θέλουμε λοιπόν να βρούμε τα κοινά σημεία των f και f^{-1} άρα να λύσουμε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(f^{-1}(x)) = f(f(x)) \\ x \in A \cap f(A), f(x) \in A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = f(f(x)) \\ x, f(x) \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + f(x) = f(x) + f(f(x)) \\ x, f(x) \in A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K(x) = K(f(x)) \\ x, f(x) \in A \end{cases} \stackrel{K \uparrow-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) = x \\ x \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = x \\ x \in f(A) \end{cases}$$

Επομένως αν $f \uparrow$ έχουμε τις εξής
ισοδυναμίες

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = f(x) \\ x \in A \cap f(A) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ x \in A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = x \\ x \in f(A) \end{array} \right\}$$



κοινά σημεία
της f, f^{-1}



κοινά σημεία
της f με την
 $y=x$



κοινά σημεία
της f^{-1} με
την $y=x$

* Η "τριπλή" ισοδυναμία ισχύει μόνο αν $f \uparrow$

* Οι δύο τελευταίες είναι πάντα ισοδύναμες,
όπως έχουμε και!!!