

## Κατανόησης Καλύτερα το Σχολικό Βιβλίο

39. Αν  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως φθίνουσα και περιττή στο  $A$ , τότε οι  $f, f^{-1}$  τέμνονται πάνω στην  $y = -x$ .

Απόδειξη

Θέτουμε  $K(x) = f(x) - x$  και εστω  $x_1, x_2 \in A \cap \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (1) \quad (f \text{ γν. φθίνουσα})$$

Επίσης  $-x_1 > -x_2 \quad (2)$ . Από  $(1) + (2)$  έχουμε

$$f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$$

$$\Rightarrow K(x_1) > K(x_2)$$

Αρα η  $K$  είναι γν. φθίνουσα και άρα 1-1. Τότε για κάθε  $x \in A \cap \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(f(x))$$

$$\Leftrightarrow x = f(f(x))$$

$$\Leftrightarrow x - f(x) = f(f(x)) - f(x)$$

$$\stackrel{f(-x) = -f(x)}{\Leftrightarrow} -(-x) + f(-x) = f(f(x)) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(-x) - (-x) = f(f(x)) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow K(-x) = K(f(x))$$

$$\stackrel{K \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(x) = -x$$